ریاضی

نویں جماعت کے لیے

سندھ ٹیکسٹ بک بورڈ، جام شورو

طبع کنندہ

سندھ آفسٹ پرنٹرز اینڈ پبلشرز ۔ کراچی

تیار کردہ: سندھ ٹیکسٹ بک بورڈ، جام شورو
منظور شدہ وفاقی محکمۂ تعلیم اسلام آباد بطور نصابی کتاب برائے مدارس صوبہ سندھ۔
قومی کمیٹی برائے جائزہ کتب نصاب کی تصحیح شدہ۔

نگرانِ اعلیٰ:
آغا سہیل احمد
چیئرمین، سندھ ٹیکسٹ بک بورڈ

مصنفین

☆ پروفیسر ڈاکٹر نور مصطفیٰ شیخ ☆ پروفیسر محب اللہ شیخ ☆ ڈاکٹر اعجاز احمد صدیقی
☆ محمد یعقوب میمن ☆ پروفیسر سید آفاق احمد ☆ پروفیسر غفار حسین شیخ
☆ عابد سہیل ☆ شمس الحق مغل ☆ ارجن لعل۔ ایس۔ سدھریا
☆ پروفیسر محمد فاروق ☆ سکندر علی ببر

مدیر

☆ پروفیسر ڈاکٹر نور مصطفیٰ شیخ ☆ پروفیسر ڈاکٹر محمد ذکاء اللہ خان

نظرِ ثانی کردہ

☆ ارجن لعل۔ ایس۔ سدھریا ☆ مس عطیہ تبسم بھٹو

کوآرڈینیٹر

☆ ارجن لعل۔ ایس۔ سدھریا ☆ خلیل احمد سرہندی

مترجم

لیفٹیننٹ کمانڈر پروفیسر ڈاکٹر ایم۔ ایم۔ اے فیروز
غفار حسین شیخ

انچارج/ پروف ریڈر

بلاول علی خان

کمپوزنگ اور لے آؤٹ ڈیزائننگ
راشد راجپوت سپر گرافکس اینڈ آرٹ سیکشن حیدر آباد

پیسٹنگ
سہیل سلام بھٹو

مطبع سندھ آفسٹ پرنٹرز اینڈ پبلشرز، کراچی

فہرست

پیش لفظ

سندھ ٹیکسٹ بک بورڈ ایک ایسا تعلیمی ادارہ ہے جس کا فریضہ درسی کتب کی تیاری واشاعت ہے۔اس کا اولین مقصد ایسی درسی کتب کی تیاری وفراہمی ہے جو نسل نو کو شعور و آگہی اور ایسی صلاحیت بخشیں جن کے ذریعے وہ اسلام کی آفاقی نظریات، بھائی چارے، اسلاف کے کارناموں اور اپنے ثقافتی ورثہ وروایات کی پاسداری کرتے ہوئے دور جدید کے نت نئے سائنسی، تکنیکی اور معاشرتی تقاضوں کا مقابلہ کر کے کامیاب زندگی گزار سکیں۔

اس اعلیٰ مقصد کی تکمیل کی غرض سے اہل علم، ماہرین مضامین، مدرسین کرام اور مخلص احباب کی ایک ٹیم ہر چارسمت سے حاصل ہونے والی تجاویز کی روشنی میں درسی کتب کے معیار، جائزے اوران کی اصلاح کے لئے ہمارے ساتھ پیہم مصروف عمل ہے۔

ہمارے ماہرین اور اشاعتی عملے کے لئے اپنے مطلوبہ مقاصد کا حصول اسی صورت میں ممکن ہے کہ ان کتب سے اساتذہ کرام اور طلبہ وطالبات کماحقہٗ استفادہ کریں، علاوہ ازیں ان کی تجاویز و آراء ان کتب کے معیار کو مزید بہتر بنانے میں ہمارے لئے مدد ومعاون ثابت ہوگی۔

چیئرمین

سندھ ٹیکسٹ بک بورڈ، جام شورو سندھ

بسم اللہ الرحمٰن الرحیم

یونٹ 1

سیٹ

1.1 اعادہ

سیٹ کا تصور ریاضی کی تمام شاخوں میں بنیادی حیثیت رکھتا ہے۔ سیٹ مختلف اشیاء کے واضح اجتماع کو کہتے ہیں۔ اِن اشیاء کو سیٹ کے ارکان یا عناصر کہا جاتا ہے، سیٹوں کو عموماً انگریزی حروف A,B,C,....,X,Y,Z اور ارکان کو انگریزی کے چھوٹے حروف $a,b,c,.....x,y,z$ سے ظاہر یا جاتا ہے۔

اگر a سیٹ A کا رکن ہو تو اسے ہم $a \in A$ لکھتے ہیں اور پڑھتے ہیں "a سیٹ A میں موجود ہے یا سیٹ A کا رکن ہے"۔ اگر a سیٹ A کا رکن نہیں ہے تو ہم $a \notin A$ لکھتے ہیں اور پڑھتے ہیں: "a سیٹ A میں موجود نہیں ہے"۔

1.2 اعداد کے چند اہم سیٹ

اعداد کے مختلف سیٹوں کے لیے مندرجہ ذیل علامات استعمال کی جائیں گی۔

قدرتی اعداد کا سیٹ: $\mathbf{N} = \{1, 2, 3, -----\}$

مکمل اعداد کا سیٹ: $\mathbf{W} = \{0, 1, 2, -----\}$

صحیح اعداد کا سیٹ: $\mathbf{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, -----\}$

مثبت مفرد اعداد کا سیٹ: $\mathbf{P} = \{2, 3, 5, 7, 11, -----\}$

طاق اعداد کا سیٹ: $\mathbf{O} = \{\pm 1, \pm 3, \pm 5, -----\}$

جفت اعداد کا سیٹ: $\mathbf{E} = \{0 \pm 2, \pm 4, \pm 6, -----\}$

ناطق اعداد کا سیٹ: $\mathbf{Q} = \{x \mid x = \frac{p}{q}; p, q \in Z, q \neq 0\}$

غیر ناطق اعداد کا سیٹ: $Q' = \{x \mid x \neq \frac{p}{q}\ ; p, q \in Z, q \neq 0\}$

حقیقی اعداد کا سیٹ: $R = Q \cup Q'$

مزید یہ کہ Z^+ اور Z^- بالترتیب مثبت اور منفی صحیح اعداد کو ظاہر کریں گے۔اسی طرح R^+ اور R^- بالترتیب مثبت اور منفی حقیقی اعداد کو ظاہر کریں گے۔

1.2.1 ترقیم

اگر b, a اور c سیٹ A کے ارکان ہیں تو ہم اسے اس طرح لکھتے ہیں: $A = \{a, b, c\}$

یہ سیٹ لکھنے کی اندراجی شکل (*Tabular Form*) ہے۔

سیٹ کسی بیان کی مدد سے بھی لکھا جا سکتا ہے۔ مثلاً،

انگریزی حروف تہجی کے پہلے تین حروف کا سیٹ = A یہ سیٹ لکھنے کی بیانیہ شکل (*Descriptive Form*) ہے۔

مندرجہ بالا دو طریقوں کے علاوہ ایک اور طریقے سے بھی سیٹ کو لکھا جاتا ہے۔اس میں ارکان کی خصوصیت یا خصوصیات بیان کی جاتی ہیں۔

مثلاً $A = \{x \mid x$ ایک طاق صحیح عدد ہے $\}$

اسے پڑھتے ہیں "A تمام x کا سیٹ ہے جبکہ x ایک طاق صحیح عدد ہے"

سیٹ لکھنے کی اس شکل کو ترقیم سیٹ ساز (*Set builder Form*) کہتے ہیں۔

کسی سیٹ A میں عناصر کی تعداد کو $n(A)$ یا $|A|$ سے ظاہر کرتے ہیں۔ جیسے اگر $A = \{a, b, c\}$ تو $n(A) = 3 = |A|$

1.2.2 خالی سیٹ

ایسا سیٹ جس میں ایک بھی رکن نہ ہے خالی سیٹ (*Null Set*) کہلاتا ہے۔

جسے $\varnothing$ یا $\{\ \}$ سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

مثال: $A = \{x \mid x > 5$ اور $x < 2\} = \varnothing$

1.2.3 متناہی سیٹ

ایسا سیٹ جس کے ارکان محدود ہوں متناہی سیٹ (*Finite Set*) کہلاتا ہے۔

مثال کے طور پر $B = \{a, b, c, d, e\}$ ، $A = \{1, 2, 3, 4\}$ وغیرہ

1.2.4 غیر متناہی سیٹ

ایسا سیٹ جو متناہی نا ہو غیر متناہی سیٹ (*Infinite Set*) کہلاتا ہے۔

ذیل میں کچھ غیر متناہی سیٹ دیے گئے ہیں۔

$A = \{1, 3, 5, ...\}$, $B = \{1, 2, 3, ...\}$, $C = \{..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, ...\}$

1.2.5 مساوی سیٹ

دو سیٹ صرف اور صرف اس صورت میں مساوی سیٹ (Equal Set) کہلاتے ہیں کہ دونوں کے ارکان ایک جیسے ہوں۔

مثلاً $A = \{a, b, c, d\}$ اور $B = \{b, c, a, d\}$ مساوی سیٹ ہیں کیونکہ دونوں کے ارکان ایک جیسے ہیں۔

اگر A اور B مساوی سیٹ ہوں تو انہیں اس طرح لکھتے ہیں : $A = B$

اگر $C = \{a, b\}$ تو $A \neq C$ کیوں؟

اگر $D = \{a, b, d\}$ تو $A \neq D$ کیوں؟

1.2.6 مترادف سیٹ

اگر A اور B کوئی دو سیٹ ہیں اور اُن کے ارکان کے درمیان میں ایک۔ایک مطابقت قائم ہو، تو سیٹ A اور B مترادف سیٹ (Equivalent Set) کہلاتے ہیں۔اور اسے اس طرح لکھتے ہیں: $A \sim B$

متناہی سیٹوں کی صورت میں اِس سے مراد یہ ہے کہ کسی ایک سیٹ میں ارکان کی تعداد وہی ہو جو دوسرے سیٹ کے ارکان کی تعداد ہو۔یعنی $n(A) = n(B)$

مثلاً $A = \{a, b, c, d, e\}$ ، $B = \{2, 3, 1, 5, 4\}$ اور $C = \{x, y, z, u, w\}$

چونکہ $n(A) = n(B) = n(C) = 5$

اس لیے $A \sim B,\ B \sim C,\ C \sim A$

یعنی $A \sim B \sim C$

اب مندرجہ ذیل سیٹوں کو ملاحظہ کیجیے۔

$P = \{1, 0, 3\}$ اور $Q = \{3, 2, 1, 4\}$ یہاں $1 \leftrightarrow 3$ ، $0 \leftrightarrow 2$ ، $3 \leftrightarrow 1$

لیکن $4 \in Q$ ، P کے کسی رُکن سے مطابقت نہیں رکھتا۔اس لیے سیٹ P اور سیٹ Q مترادف نہیں ہیں۔

اسے ہم $P \nsim Q$ سے ظاہر کرتے ہیں۔

نوٹ: اگر دو سیٹ مساوی ہوں تو وہ مترادف بھی ہوتے ہیں لیکن دو مترادف سیٹ ضروری نہیں ہے کہ مساوی سیٹ بھی ہوں۔

1.2.7 تحتی سیٹ

اگر A اور B دو سیٹ ہوں اور A کا ہر رُکن B کا بھی رُکن ہو۔تو سیٹ A سیٹ B کا تحتی سیٹ (Subset) کہلاتا ہے۔

اور اِسے $A \subseteq B$ سے ظاہر کرتے ہیں۔

نوٹ: (1) خالی سیٹ $(\varnothing)$ ہر سیٹ کا تحتی سیٹ ہوتا ہے۔

(2) ہر سیٹ خود اپنا تحتی سیٹ ہوتا ہے۔

1.2.8 واجب تحتی سیٹ

اگر A اور B دوسیٹ ہیں اور سیٹ A، سیٹ B کا تحتی سیٹ ہوا اور $A \neq B$ تو A کو B کا واجب تحتی سیٹ (Proper Subset) کہتے ہیں اور اسے $A \subset B$ سے ظاہر کرتے ہیں۔

مثلاً اگر $A = \{1, 2, 3\}$ اور $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

تو $A \subset B$

1.2.9 غیرواجب تحتی سیٹ

اگر A اور B دوسیٹ ہیں اور $A \subseteq B$ اور $B \subseteq A$ تو A اور B ایک دوسرے کے غیرواجب تحتی سیٹ کہلاتے ہیں۔

- $A \subseteq B$ اور $B \subseteq A$ سے نتیجہ نکلتا ہے کہ $A = B$
- اگر $A \subset B$ تو B، سیٹ A کا فوقی سیٹ کہلاتا ہے۔ اور اِسے $A \supset B$ لکھتے ہیں۔
- $A = B$ اور $B = C$ سے نتیجہ نکلتا ہے کہ $A = C$
- $A \sim B$ اور $B \sim C$ سے نتیجہ نکلتا ہے کہ $A \sim C$

یاد رہے کہ ہرسیٹ خود اپنا غیرواجب تحتی سیٹ ہوتا ہے۔ دراصل ہرسیٹ کا ایک ہی غیرواجب تحتی سیٹ ہوتا ہے اور وہ سیٹ خود ہوتا ہے۔

نوٹ: مندرجہ بالا شرائط بعض اوقات مساوی سیٹ کی تعریف کے طور پر بھی لی جاتی ہیں۔

مثال 1. اگر $A = \{1, 2\}$ تو A کے تمام تحتی سیٹ معلوم کیجیے۔

حل: A کے تمام تحتی سیٹ مندرجہ ذیل ہیں:

$\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}$

یعنی کسی سیٹ میں دو ارکان ہوں تو اس کے تحتی سیٹ چار ہوتے ہیں۔

مثال 2. اگر $A = \{a, b, c\}$ تو A کے تمام تحتی سیٹ معلوم کیجیے۔

حل: A کے تمام تحتی سیٹ مندرجہ ذیل ہیں۔

$\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}$

یعنی اگر کسی سیٹ میں تین ارکان ہوں تو اس کے تحتی سیٹ آٹھ ہوتے ہیں۔

1.2.10 قوت سیٹ

کسی سیٹ A کے تمام ممکنہ تحتی سیٹوں کا سیٹ اس کا قوت سیٹ (*Power Set*) کہلاتا ہے۔ اور اس کے قوت سیٹ کو P(A) سے ظاہر کرتے ہیں۔

مثلاً: اگر $A = \{a, b, c\}$ تو $P(A) = \{\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}$

خالی سیٹ $\varnothing$ کے لیے $P(\varnothing) = \{\varnothing\}$

یعنی خالی سیٹ کا قوت سیٹ خالی نہیں ہوتا کیونکہ یہ ایک رکن $\varnothing$ پر مشتمل ہوتا ہے۔

مندرجہ ذیل پر غور کیجیے۔

اگر $A = \{\ \}$ تو $P(A) = \{A\}$ یعنی اگر $n(A) = 0$ تو $n(P(A)) = 1 = 2^0$

اگر $A = \{a\}$ تو $P(A) = \{\varnothing, \{a\}\}$ یعنی اگر $n(A) = 1$ تو $n(P(A)) = 2 = 2^1$

اگر $A = \{a, b\}$ تو $P(A) = \{\varnothing\ \{a\}, \{b\}, \{a,b\}\}$ یعنی اگر $n(A) = 2$ تو $n(P(A)) = 4 = 2^2$

ان مثالوں سے ہم یہ نتیجہ اخذ کرتے ہیں کہ اگر $n(P(A)) = m$ تو A کے تمام تحتی سیٹوں کی تعداد 2^m ہوتی ہے۔

یعنی $\boxed{n(P(A)) = 2^m}$

مشق 1.1

1. مندرجہ ذیل سیٹوں کو اندراجی اور ترقیم سیٹ ساز دونوں طریقوں میں لکھیے:

(a) ایسے تمام مثبت صحیح اعداد کا سیٹ جو 2 بڑے اور 6 سے چھوٹے ہوں۔

(b) 20 سے چھوٹے ایسے تمام مثبت صحیح اعداد کا سیٹ جو 5 سے تقسیم پذیر ہوں۔

(c) 4 اور 12 کے درمیان قدرتی اعداد کا سیٹ

(d) پہلے چھ مثبت مفرد اعداد کا سیٹ

2. مندرجہ ذیل سیٹوں میں سے کون سے خالی سیٹ ہیں؟

$A = \{x \mid$ x انگریزی حروف تہجی کا ایک حروف ہے جو a سے پہلے آتا ہے $\}$

$B = \{x \mid x + 5 = 5\}$

$C = \{x \mid$ x ایسا عدد ہے جو 7 سے چھوٹا اور 8 سے بڑا ہو $\}$

$D = \{x \mid$ x پاکستان کی سابقہ خاتون صدر ہے $\}$

3. مندرجہ ذیل میں سے کون سے سیٹ متناہی ہیں اور کون سے سیٹ غیر متناہی ہیں؟

(a) سال کے مہینے (b) سال کے دن

(c) آپ کی جماعت کے طلباء (d) $\{2, 4, 6, 8, 10, ...\}$

(e) ایک نقطے سے گزرنے والے خطوط کا سیٹ (f) دیئے گئے دو نقاط سے گزرنے والے خطوط کا سیٹ

4. اگر $S = \{x \mid$ مثبت صحیح عدد ہے $x\}$ تو S کے ایسے واجب تحتی سیٹ معلوم کیجیے جو A کے بھی تحتی سیٹ ہوں جبکہ $A = \{x \mid$ سے چھوٹا صحیح عدد ہے $3, x\}$

5. اگر $A = \{a, b, c, d\}$ تو معلوم کیجیے:

(a) A کے واجب تحتی سیٹ (b) A کا غیر واجب تحتی سیٹ

(c) A کے دو تحتی سیٹ B اور C جبکہ $B \subset C$ (d) A کے دو تحتی سیٹ B اور C جبکہ $B \subseteq C$

6. $A = \{a, b, c, d\}$ کے تمام تحتی سیٹ معلوم کیجیے نیز $|P(A)|$ معلوم کیجیے۔

7. کیا کوئی ایسا سیٹ ہے جس کا کوئی واجب تحتی سیٹ نہ ہو؟ اگر ہے تو نشاندہی کیجیے۔

8. ایک ایسا سیٹ معلوم کیجیے جس کا صرف ایک ہی واجب تحتی سیٹ ہو۔

9. اگر $n(A) = 10$ تو $n(P(A)) =$ ______

10. ترقیم سیٹ ساز کو استعمال کرتے ہوئے خالی سیٹ کی کوئی مثال دیجیے۔

11. اگر $A = \{1,2,3,4\}$ ہو تو A کا واجب تحتی سیٹ B معلوم کیجیے پھر B کا واجب تحتی سیٹ C معلوم کیجیے پھر C کا واجب تحتی سیٹ D معلوم کیجیے۔

12. مندرجہ ذیل سیٹوں میں سے کون سے مترادف سیٹ ہیں؟

(a) $A = \{a, b, c\}, B = \{1, 2, 3\}$ (b) $A = \{1, 2, 3, 4\}, B = \{a, b, c\}$

(c) $B = \{a, e, i, o, u\}$ $A = \{x \mid$ سے چھوٹا مثبت صحیح عدد ہے $6, x\}$

1.3 دو سیٹوں پر عوامل

دو سیٹوں کے درمیان مختلف طرح کے عوامل ہو سکتے ہیں۔

1.3.1 دو سیٹوں کا اتصال

اگر A اور B دو سیٹ ہوں تو ان کا اتصال (*Union*) ایسا سیٹ ہے جس میں وہ ارکان شامل ہوتے ہیں جو A میں یا B میں یا دونوں میں موجود ہوں۔ اسے AUB سے ظاہر کرتے ہیں۔

اگر $A = \{1,2,5,8\}$ اور $B = \{1,3,5,9\}$ تو $AUB = \{1,2,3,5,8,9\}$

1.3.2 دوسیٹوں کا تقاطع

اگر A اور B دوسیٹ ہوں تو اِن کا تقاطع (*Intersection*) ایسا سیٹ ہے جس میں وہ ارکان شامل ہوتے ہیں جو A اور B دونوں میں موجود (مشترک) ہوں۔ اسے $A \cap B$ سے ظاہر کرتے ہیں۔

اگر $A = \{a, b, c, d\}$ اور $B = \{b, d, e, f\}$ تو $A \cap B = \{b, d\}$

1.3.3 دوسیٹوں کا فرق

اگر A اور B دو سیٹ ہوں تو A فرق B ایسا سیٹ ہے جس میں وہ ارکان شامل ہوتے ہیں جو A میں موجود ہوں لیکن B میں نہ ہوں۔ اِسے $A-B$ سے ظاہر کرتے ہیں۔

اگر $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ اور $B = \{2, 4, 6, 8\}$ تو $A-B = \{1, 3, 5\}$ اور $B-A = \{6, 8\}$

اگر A اور B دوسیٹ ہوں تو ان کا تشاکلی فرق (*Symmetric difference*) ایسا سیٹ، ہے جس میں وہ ارکان شامل ہوتے ہیں جو A میں یا B میں موجود ہوں لیکن A اور B دونوں میں موجود (مشترک) نہ ہوں۔ اِسے $A \Delta B$ سے ظاہر کرتے ہیں۔

مثال: $A \Delta B$ معلوم کیجیے اگر $A = \{1, 2, 3, 4, 6\}$ اور $B = \{1, 3, 5, 7\}$

حل: چونکہ $A = \{1, 2, 3, 4, 6\}$ اور $B = \{1, 3, 5, 7\}$ پس $A \Delta B = \{2, 4, 5, 6, 7\}$

نوٹ: $A \Delta B = A \cup B - A \cap B$

1.3.4 کائناتی سیٹ

ایسا سیٹ جو کسی زیرِغور مسئلے سے تعلق رکھنے والے تمام ارکان پر مشتمل ہو کائناتی سیٹ (**Universal Set**) کہلاتا ہے۔
اسے عموماً "U" سے ظاہر کرتے ہیں۔

مثلاً آپ کے اسکول کے تمام طلباء کا سیٹ، کائناتی سیٹ ہے۔ اگر اسکول کے طلباء پر مبنی اور سیٹ لیے جائیں جیسے نویں جماعت کے طلباء کا سیٹ یا دسویں جماعت کے طلباء کا سیٹ وغیرہ تو یہ اسکول کے تمام طلباء کے سیٹ یعنی کائناتی سیٹ کے تحتی سیٹ ہوں گے۔

1.3.5 سیٹ کا تکملہ یا کمپلیمنٹ

اگر U کائناتی سیٹ اور $A \subset U$ تو سیٹ A کا تکملہ (*Complement*) ایسا سیٹ ہے جس میں U کے وہ ارکان ہوتے ہیں۔ جو A میں موجود نہ ہوں۔ اِسے A' یا A^c سے ظاہر کرتے ہیں۔

اگر $U = \{1, 2, 3, ...,10\}$ اور $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$

تو $A' = U - A = \{2, 4, 6, 8, 10\}$ اور $(A')' = A$

1.4 تین سیٹوں پر اتصال اور تقاطع کے عوامل

اگر B, A اور C تین سیٹ ہوں تو اتصال اور تقاطع کے مندرجہ ذیل عوامل کیے جا سکتے ہیں۔

(i) $A \cup (B \cup C)$ (ii) $(A \cup B) \cup C$ (iii) $A \cap (B \cap C)$ (iv) $(A \cap B) \cap C$

(v) $A \cup (B \cap C)$ (vi) $A \cap (B \cup C)$ (vii) $(A \cup B) \cap C$ (viii) $(A \cap B) \cup C$

(ix) $(A \cup B) \cap (A \cup C)$ (x) $(A \cap B) \cup (A \cap C)$

ان عوامل میں سے چند کی وضاحت مندرجہ ذیل مثالوں سے کی جاتی ہیں۔

اگر $A = \{a, b, c\}$, $B = \{b, c, d, e\}$, $C = \{c, d, e, f, h\}$ ، تو

(i) $A \cup (B \cup C) = \{a, b, c\} \cup (\{b, c, d, e\} \cup \{c, d, e, f, h\})$

$= \{a, b, c\} \cup \{b, c, d, e, f, h\}$

$= \{a, b, c, d, e, f, h\}$

(ii) $(A \cup B) \cup C = (\{a, b, c\} \cup \{b, c, d, e\}) \cup \{c, d, e, f, h\}$

$= \{a, b, c, d, e\} \cup \{c, d, e, f, h\}$

$= \{a, b, c, d, e, f, h\}$

(v) $A \cup (B \cap C) = \{a, b, c\} \cup (\{b, c, d, e\} \cap \{c, d, e, f, h\})$

$= \{a, b, c\} \cup \{c, d, e\}$

$= \{a, b, c, d, e\}$

(ix) $(A \cup B) \cap (A \cup C) = (\{a, b, c\} \cup \{b, c, d, e\}) \cap (\{a, b, c\} \cup \{c, d, e, f, h\})$

$= \{a, b, c, d, e\} \cap \{a, b, c, d, e, f, h\}$

$= \{a, b, c, d, e\}$

1.5 دو یا تین سیٹوں پر اتصال اور تقاطع کی خصوصیات

اب ہم دو یا تین سیٹوں کے لیے اتصال اور تقاطع کی بنیادی خصوصیات بیان کرتے ہیں۔ طلباء ان کے ثبوت اگلی جماعتوں میں سیکھیں گے۔ یہاں مثالوں سے ان کی تصدیق کی جائے گی۔

(i) اتصال کی خاصیت مبادلہ **(Commutative Property of Union)**

کسی بھی دو سیٹوں A اور B کے لیے

$A \cup B = B \cup A$

مثال: اگر $A=\{a\}$ اور $B=\{a,b\}$ تو

$$A\cup B=\{a\}\cup\{a,b\}=\{a,b\}$$

اور $B\cup A=\{a,b\}\cup\{a\}=\{a,b\}$

پس $A\cup B=B\cup A$

(ii) تقاطع کی خاصیت مبادلہ (*Commutative Property of Intersection*)

کسی بھی دو سیٹوں A اور B کے لیے

$$A\cap B=B\cap A$$

مثال: اگر $A=\{a\}$ اور $B=\{a,b\}$ تو

$$A\cap B=\{a\}\cap\{a,b\}=\{a\}$$

$$B\cap A=\{a,b\}\cap\{a\}=\{a\}$$

پس $A\cap B=B\cap A$

(iii) اتصال کی خاصیت تلازم (Associative Property of Union)

کسی بھی تین سیٹوں B, A اور C کے لیے

$$A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C$$

مثلاً: اگر $A=\{a\}$ ، $B=\{a,b\}$ اور $C=\{a,b,c\}$ تو

$$A\cup(B\cup C)=\{a\}\cup(\{a,b\}\cup\{a,b,c\})=\{a\}\cup\{a,b,c\}=\{a,b,c\}$$

$$(A\cup B)\cup C=(\{a\}\cup\{a,b\})\cup\{a,b,c\}=\{a,b\}\cup\{a,b,c\}=\{a,b,c\}$$

پس $A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C$

(iv) تقاطع کی خاصیت تلازم (*Associative Property of Intersection*)

کسی بھی تین سیٹوں B, A اور C کے لیے

$$A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C$$

مثال: اگر $A=\{a\}$ ، $B=\{a,b\}$ اور $C=\{a,b,c\}$ تو

$$A\cap(B\cap C)=\{a\}\cap(\{a,b\}\cap\{a,b,c\})=\{a\}\cap\{a,b\}=\{a\}$$

$$(A\cap B)\cap C=(\{a\}\cap\{a,b\})\cap\{a,b,c\}=\{a\}\cap\{a,b,c\}=\{a\}$$

پس $A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C$

(v) اتصال کی خاصیت تقسیمی بلحاظ تقاطع (Distributive Property of Union over Intersection)

کسی بھی تین سیٹوں A ، B اور C کے لیے

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

(vi) تقاطع کی خاصیت تقسیمی بلحاظ اتصال (Distributive Property of Intersection over Union)

کسی بھی تین سیٹوں A ، B اور C کے لیے

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

نوٹ: خصوصیات (v) اور (vi) کی طلباء خود تصدیق کریں۔

1.6 ڈی مورگن کے قوانین

اگر U کائناتی سیٹ ہو اور A, B اس کے تحت سیٹ ہوں تو

$$\text{(i)}\ (A \cup B)' = A' \cap B' \quad \text{(ii)}\ (A \cap B)' = A' \cup B'$$

ان قوانین کو ڈی مورگن کے قوانین (De Morgan's Laws) کہا جاتا ہے۔ اِن کی پڑتال مندرجہ ذیل مثال سے کرتے ہیں۔

مثال: اگر $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ ، $A = \{1, 3, 5, 7\}$ اور $B = \{3, 4, 5, 6\}$ تو

ڈی مورگن کے قوانین کی پڑتال کیجیے۔

حل: (i) $(A \cup B) = \{1, 3, 4, 5, 6, 7\} \Rightarrow (A \cup B)' = U - (A \cup B) = \{2\}$

$A' = U - A = \{2, 4, 6\}$ اور $B' = U - B = \{1, 2, 7\}$

لہٰذا $A' \cap B' = \{2\}$

پس $(A \cup B)' = A' \cap B'$

(ii) $A \cap B = \{3, 5\} \Rightarrow (A \cap B)' = U - (A \cap B) = \{1, 2, 4, 6, 7\}$

$A' = \{2, 4, 6\}$ اور $B' = \{1, 2, 7\}$

لہٰذا $A' \cup B' = \{1, 2, 4, 6, 7\}$

پس $(A \cap B)' = A' \cup B'$

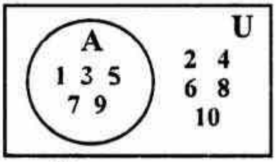
1.7 وین اشکال

اشکالوں کے ذریعے بھی سیٹوں کو ظاہر کیا جاتا ہے۔ جنہیں وین اشکال (Venn Diagrams) کہا جاتا ہے۔ انہیں یہ نام انگریز ریاضی دان جون وین (John Venn) کی وجہ سے دیا گیا ہے کیونکہ اس نے 1881ء میں اشکال کے ذریعہ سیٹوں کو ظاہر کرنے کا طریقہ متعارف کروایا۔ وین اشکال میں کائناتی سیٹ U کو عموماً مستطیل سے ظاہر کیا جاتا ہے۔ اس مستطیل کے اندر سیٹوں کو دائرے یا دیگر ہندسی اشکال سے ظاہر کیا جاتا ہے۔ سیٹوں کے آپس میں تعلق کو ظاہر کرنے کے لیے عموماً وین اشکال کو استعمال کیا جاتا ہے۔

مثال: $U = \{1, 2, 3, ..., 10\}$ اور $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ کو ظاہر کرنے کے لیے وین شکل بنائیے۔

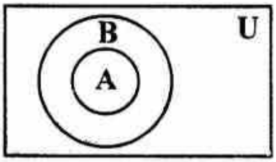
حل: ہم کائناتی سیٹ U کو ظاہر کرنے کے لیے ایک مستطیل بناتے ہیں۔اس مستطیل میں A کو ظاہر کرنے کے لیے ایک دائرہ بناتے ہیں۔اور A کے عناصر کو اس دائرے میں نقاط سے ظاہر کرتے ہیں جیسا کہ شکل 1.1 میں دکھایا گیا ہے۔

شکل 1.1



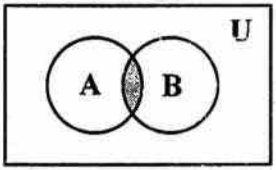
اگر کوئی سیٹ A کسی سیٹ B کا تحتی سیٹ ہے تو اسے وین اشکال کی مدد سے دکھایا جا سکتا ہے۔اس کے لیے ہم کائناتی سیٹ کے لیے مستطیل بناتے ہیں جس میں B کے لیے ایک دائرہ بناتے ہیں B کے تحتی سیٹ A کے لیے ایک اور دائرہ B کے دائرے کے اندر بناتے ہیں۔اس تعلق کو شکل 1.2 میں دکھایا گیا ہے۔

شکل 1.2

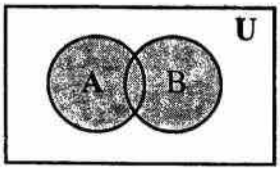


شکل 1.3 میں وین اشکال سیٹ A اور B کے اتصال اور تقاطع کو ظاہر کرتے ہیں۔ دائروں کے سایہ دار حصے سیٹ A اور B کے اتصال اور تقاطع کو ظاہر کرتے ہیں۔

وین شکل برائے $A \cap B$



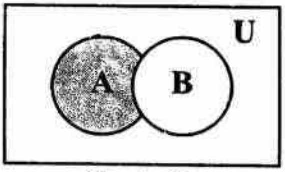
وین شکل برائے $A \cup B$



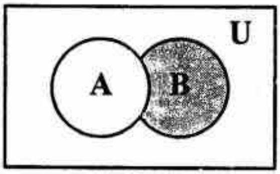
شکل 1.3

شکل 1.4 میں وین اشکال (i) $A - B$ (ii) $B - A$ (iii) $A \Delta B$ کو ظاہر کرتے ہیں۔

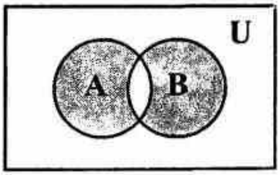
شکل 1.4



(i) $A - B$



(ii) $B - A$

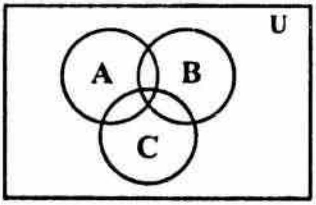


(iii) $A \Delta B$

شکل 1.5 میں دائرے کے باہر کا سایہ دار حصہ A' کو ظاہر کرتا ہے۔

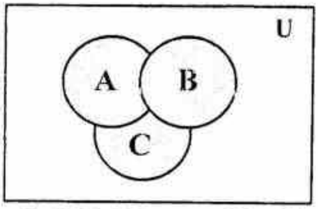
شکل 1.5

شکل 1.6 میں وین اشکال کے ذریعہ $(A\cup B)\cup C = A\cup(B\cup C)$ اور $(A\cap B)\cap C = A\cap(B\cap C)$ کو دکھایا گیا ہے۔



$(A\cap B)\cap C = A\cap(B\cap C)$

شکل 1.6



$(A\cup B)\cup C = A\cup(B\cup C)$

مشق 1.2

اگر $A = \{f, a, c, e\}$ اور $B = \{e, g, d, f\}$ کائناتی سیٹ $U = \{a, b, c, d, e, f, g\}$ کے تحتی سیٹ ہیں۔ تو مندرجہ ذیل سیٹوں کے ارکان لکھیے۔

(1) A' **(2)** B' **(3)** $A\cap B$ **(4)** $(A\cup B)'$

(5) $A\cap B'$ **(6)** $A'\cap B'$ **(7)** $U\cup\varnothing$ **(8)** $U\cap\varnothing$

اگر $A = \{x \mid$ مثبت طاق صحیح عدد ہے جو 10 سے کم ہو $x\}$ اور $B = \{x \mid$ مثبت جفت صحیح عدد ہے جو 10 سے کم ہو $x\}$ کائناتی سیٹ $U = \{x \mid$ مثبت صحیح عدد ہے جو 10 سے کم ہو $x\}$ کے تحتی سیٹ ہوں تو مندرجہ ذیل سیٹوں کے ارکان لکھیے۔

(9) $A\cup B'$ **(10)** $A'\cap B$ **(11)** $A'\cap B'$ **(12)** $A\Delta B$

(13) $A-B'$ **(14)** $A'\Delta B$ **(15)** $(A'\cap B)'$

(16) سوالات 9, 10, 11, 12, 13, 14 اور 15 کے سیٹوں کے وین اشکال بنائیے۔

اگر $A = \{1, 2, 3, 4\}$ اور $B = \{2, 4, 6, 8\}$ تو پڑتال کیجیے۔

(17) $A\Delta B = (A\cup B)-(A\cap B)$ **(18)** $A\Delta B = (A-B)\cup(B-A)$

(19) $A-B = A-(A\cap B)$

(20) اگر $U = \{1, 2, 3, \ldots, 20\}$، $A = \{1, 2, 4, 8, 10, 16, 20\}$ اور $B = \{2, 6, 8, 10, 14, 18\}$ ہو تو ڈی مورگن کے قوانین کی پڑتال کیجیے۔

(21) مندرجہ ذیل سیٹوں کے لیے اتصال اور تقاطع کی خاصیت مبادلہ کی تصدیق کیجیے۔

(a) $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{3, 5, 7, 9\}$

(b) $A = \{x \mid x\in Z^+$ اور $x\le 5\}$, $B = \{x \mid x\in Z^+$ اور $1\le x\le 4\}$

(22) نیچے دیئے ہوئے سیٹوں کے لئے مندرجہ ذیل خصوصیات کی تصدیق کیجیے۔

(i) اتصال اور تقاطع کی خاصیت تلازم (ii) اتصال کی خاصیت تقسیمی بلحاظ تقاطع

(iii) تقاطع کی خاصیت تقسیمی بلحاظ اتصال

(a) $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ ، $B = \{2, 4, 6, 8\}$ اور $C = \{4, 8, 10, 12\}$

(b) $A = \{x \in x \in Z^+$ اور $x \leq 4\}$ ، $B = \{x \in x \in Z$ اور $0 < x < 5\}$ اور $C = \{1, 2, 3\}$

1.8 مترتب جوڑے

اگر ہم کسی سیٹ کے ارکان کا ایک جوڑا لیں۔ اُن ارکان میں ترتیب کا لازماً خیال رکھا جائے۔ مثلاً اگر a اور b سیٹ A کے ارکان ہوں اور ان میں ترتیب اس طرح ہو کہ a بائیں سے پہلا اور b دوسرا رکن ہو تو اس جوڑے کو مترتب جوڑا (Ordered Pair) کہتے ہیں۔ اسے (a, b) سے ظاہر کرتے ہیں۔ a اور b مترتب جوڑے کے اجزاء یا عناصر کہلاتے ہیں۔

مترتب جوڑے (a, b) اور (b, a) اسی صورت میں مساوی ہوں گے جب $a = b$ ہوگا۔

دو مترتب جوڑے (a, b) اور (c, d) مساوی ہوں گے اگر اور صرف اگر $a = c$ اور $b = d$

نوٹ: (1) سیٹ $\{2, 3\}$ اور مترتب جوڑا $(2, 3)$ مساوی نہیں ہیں کیونکہ سیٹ میں عناصر کی ترتیب ضروری نہیں ہے۔

یعنی $\{2, 3\} = \{3, 2\}$

(2) مترتب جوڑوں میں پہلے اور دوسرے اجزاء مساوی ہو سکتے ہیں۔ مثلاً $(1, 1)$ ، $(2, 2)$ ، $(4, 4)$ اور $(5, 5)$

لیکن سیٹ میں کوئی رُکن دہرایا نہیں جاتا۔

مثال: اگر $(x - 2, 6) = (4, 6)$ تو x کی قیمت معلوم کیجیے۔

حل: مترتب جوڑوں کی برابری کی شرط کے مطابق

$$x - 2 = 4$$

یا $x = 6$

1.9 سیٹوں کا کارتیسی حاصل ضرب

اگر A اور B دو سیٹ ہوں تو اُن کی کارتیسی حاصل ضرب (Cartesian Product) سے مراد ایسا سیٹ ہے جس کے ارکان ایسے مترتب جوڑے ہیں جن کے پہلے عناصر سیٹ A کے رکن ہیں اور دوسرے عناصر سیٹ B کے رکن ہیں۔

A اور B کے کارتیسی حاصل ضرب کو $A \times B$ سے ظاہر کیا جاتا ہے۔ علامتی طور پر اسے اس طرح لکھتے ہیں:

$$A \times B = \{(a, b) \in a \in A \text{ اور } b \in B\}$$

مثالیں: (i) اگر $A = \{1, 2, 3\}$ اور $B = \{a, b\}$ تو

$$A \times B = \{(1, a), (1, b), (2, a), (2, b), (3, a), (3, b)\}$$

(ii) اگر $A = B = Z$ تو

$$A \times B = Z \times Z = \{(m, n) \quad m, n \in Z\}$$

قابل توجہ امور:

(i) اگر A یا B میں سے کوئی خالی سیٹ ہو تو $A \times B = \varnothing$

(ii) $A \times B \neq B \times A$ جب تک کہ $A = B$

(iii) اگر A یا B میں ارکان کی تعداد بالترتیب m اور n ہو تو $A \times B$ میں عناصر کی تعداد $m \times n$ ہوتی ہے۔

1.10 ثنائی ربط

اگر A اور B کوئی سے دو سیٹ ہوں تو $A \times B$ کے کسی بھی تحتی سیٹ کو A سے B میں ثنائی ربط (Binary Relation) کہتے ہیں۔

یعنی $A \times B$ کا ہر تحتی سیٹ A سے B میں ثنائی ربط ہے۔

اسی طرح $A \times A$ کا کوئی بھی تحتی سیٹ A میں ثنائی ربط ہوتا ہے۔

مثال 1. اگر $A = \{x, y\}$ اور $B = \{-1, 0, 1\}$ تو

$$A \times B = \{(x, -1), (x, 0), (x, 1), (y, -1), (y, 0), (y, 1)\}$$

اگر $R_1 = \{(x, 0), (y, 0)\}$ تو $A \times B$ میں R_1 ثنائی ربط ہے۔

اسی طرح $R_2 = \{(x, -1), (y, -1)\}$ بھی $A \times B$ میں ثنائی ربط ہے۔

مثال 2. اگر $A = \{1, 2, 3, 4\}$ تو

$$A \times A = \{ (1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 1) (2, 2), (2, 3), (2, 4)$$
$$(3, 1), (3, 2) (3, 3), (3, 4), (4, 1), (4, 2), (4, 3), (4, 4)\}$$

(i) $R_1 = \{(x, y) \mid x, y \in A$ اور $y > x\} = \{(1, 2),(1, 3), (1, 4), (2, 3), (2, 4), (3, 4)\}$

(ii) $R_2 = \{(x, y) \mid x, y \in A$ اور $y = x\} = \{ (1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4)\}$

چونکہ $R_1, R_2 \subseteq A \times A$ لہٰذا R_1 اور R_2 A میں ثنائی روابط ہیں۔

نوٹ: $(a, b) \in R$ کا مطلب ہے رکن a رکن b سے R کے تحت وابستہ ہے اسے aRb لکھتے ہیں۔

مثال 3. $A = \{a, b\}$ کے تمام ثنائی روابط لکھیے۔

حل: $A \times A = \{ (a, a), (a, b), (b, a), (b, b)\}$

چونکہ $A \times A$ کے تمام تحتی سیٹ A میں ثنائی روابط ہیں۔ انھیں ذیل میں بیان کیا گیا ہے۔

$R_1 = \varnothing$	$R_7 = \{(a, a), (b, a)\}$	$R_{12} = \{(a, a), (a, b), (b, a)\}$
$R_2 = \{(a, a)\}$	$R_8 = \{(a, a), (b, b)\}$	$R_{13} = \{(a, a), (a, b), (b, b)\}$
$R_3 = \{(a, b)\}$	$R_9 = \{(a, b), (b, a)\}$	$R_{14} = \{(a, a), (b, a), (b, b)\}$
$R_4 = \{(b, a)\}$	$R_{10} = \{(a, b), (b, b)\}$	$R_{15} = \{(a, b), (b, a), (b, b)\}$
$R_5 = \{(b, b)\}$	$R_{11} = \{(b, a), (b, b)\}$	$R_{16} = \{(a, a), (a, b), (b, a), (b, b)\}$
$R_6 = \{(a, a), (a, b)\}$		

یہ بات آپ کے علم میں آئی ہوگی اگر کوئی سیٹ دو ارکان پر مشتمل ہے تو اس کے ثنائی روابط کی تعداد 16 ہوتی ہے۔ کسی مخصوص مثال میں ہمیں کسی سیٹ کے تمام ثنائی روابط کی ضرورت نہیں ہوتی بلکہ ان میں سے چند ایک کو ہم استعمال کرتے ہیں۔

1.10.1 ثنائی ربط کا حلقہ اثر (Domain) اور زد (Range)

سیٹ A سے سیٹ B میں ثنائی ربط R کے تمام مترتب جوڑوں کے پہلے اجزاء کا سیٹ، ثنائی ربط کا حلقہ اثر (*Domain*) کہلاتا ہے۔ اِسے Dom R سے ظاہر کرتے ہیں۔ ثنائی ربط R کے تمام مترتب جوڑوں کے دوسرے اجزاء کا سیٹ، ثنائی ربط کا زد (*Range*) کہلاتا ہے۔ اِسے **Range R** سے ظاہر کرتے ہیں۔

مثال 1. اگر $A = \{x, y, z\}$, $B = \{1, 2, 5\}$ تو $R = \{ (x, 1), (x, 2), (y, 1), (y, 2)\}$
A سے B میں ثنائی ربط ہے۔

لہٰذا $\text{Dom } R = \{x, y\}$, $\text{Range } R = \{1, 2\}$

مثال 2. اگر $A = \{ 1, 2, 3, 4\}$ تو

$$R_1 = \{ (1, 2). (1, 3), (1, 4), (2, 3), (2, 4), (3, 4) \}$$
$$R_2 = \{ (1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4) \}$$

A میں روابط ہیں۔

لہٰذا $\text{Dom } R_1 = \{1, 2, 3\}$, $\text{Range } R_1 = \{2, 3, 4\}$

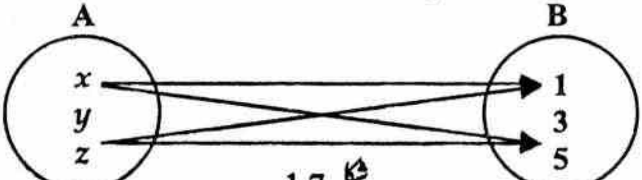
اور $\text{Dom } R_2 = \{1, 2, 3, 4\}$, $\text{Range } R_2 = \{1, 2, 3, 4\}$

1.11 تفاعل (Function)

مندرجہ ذیل مثال پر غور کیجیے۔

اگر $A = \{x, y, z\}$, $B = \{1, 3, 5\}$ اور $R_1 = \{(x, 1), (x, 5), (z, 1), (z, 5)\}$

یہاں A سے B میں ثنائی ربط R_1 میں ہم ارکان x کو 1 سے، پھر x کو 5 سے، z کو 1 سے اور پھر z کو 5 سے وابستہ کرتے ہیں، اس تعلق کو شکل 1.7 میں دکھایا گیا ہے۔

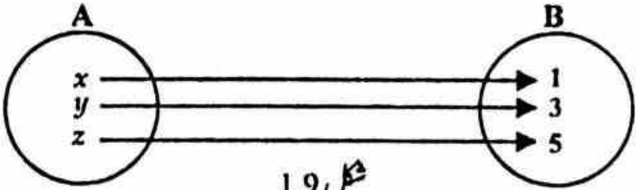


شکل 1.7

اب $A \times B$ میں ایک دوسرے ربط $R_2 = \{(x , 1), (y , 3), (z , 1), (z , 5)\}$ پر غور کیجیے۔
اس تعلق کو شکل 1.8 میں دکھایا گیا ہے۔

شکل 1.8

آخر میں ربط $R_3 = \{(x, 1), (y, 3), (z, 5)\}$ پر غور کیجیے۔ اِسے شکل 1.9 میں دکھایا گیا ہے۔



شکل 1.9

ربط R_1 میں $\text{Dom } R_1 = \{x, z\} \neq A$ مزید برآں سیٹ A کے ارکان x اور z کو سیٹ B کے دو ارکان سے وابسطہ کیا گیا۔

ربط R_2 میں $\text{Dom } R_2 = \{x, y, z\}$ لیکن سیٹ A کے رُکن z کو سیٹ B کے دو ارکان سے وابستہ کیا گیا ہے۔

ربط R_3 میں $\text{Dom } R_3 = A$ اور سیٹ A کا ہر رُکن ، سیٹ B کے صرف ایک رُکن سے وابستہ کیا گیا ہے۔

یہ مثالیں ہمیں مندرجہ ذیل تعریف تک لے جاتی ہیں۔

1.11.1 تفاعل کی تعریف

اگر A اور B دو سیٹ ہوں اور R سیٹ A سے سیٹ B میں ثنائی ربط ہو تو R، سیٹ A سے سیٹ B میں تفاعل کہلاتا ہے اگر:

(i) $\text{Dom } R = A$

(ii) سیٹ A کا ہر رُکن سیٹ B کے صرف اور صرف ایک رُکن سے R کے تحت وابستہ ہو یعنی اگر $(a, b) \in R$, اور $(a, b') \in R$ تو $b = b'$

شرط (ii) کے مطابق R کے کوئی بھی دو مترتب جوڑوں کے پہلے رکن برابر نہیں ہوتے۔

مثال 1. اگر $A = \{x, y, z\}$, $B = \{1, 3, 5\}$ اور $R_3 = \{(x, 1), (y, 3), (z, 5)\}$

یہاں $\text{Dom } R_3 = A$ اور سیٹ A کا ہر رُکن ،سیٹ B کے صرف ایک رُکن سے وابستہ کیا گیا ہے

چونکہ R_3 شرائط (i) اور (ii) کو پوری کرتا ہے لہٰذا R_3 ، A سے B میں تفاعل ہے۔

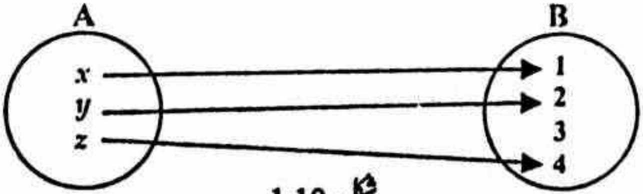
اگر کوئی ربط تفاعل ہو تو اسے عموماً f, g وغیرہ سے ظاہر کرتے ہیں۔

اگر f تفاعل ہو A سے B میں تو اِسے لکھتے ہیں: $f: A \to B$

اور اسے پڑھتے ہیں۔ f, A سے B میں تفاعل ہے۔

اگر $f: A \to B$, A سے B میں تفاعل ہے اور جوڑا (a, b), f میں ہے جب کہ $a \in A$, $b \in B$ تو b کو f کے تحت a کی شبیہ (*Image*) کہتے ہیں۔ اس کو $f(a) = b$ سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

مثال 2. اگر $A = \{x, y, z\}$, $B = \{1, 2, 3, 4\}$ تو $f = \{(x, 1), (y, 2), (z, 4)\}$



شکل 1.10

چونکہ x, 1 سے وابستہ ہے اس کو ہم لکھتے ہیں: $f(x) = 1$ اسی طرح $f(y) = 2$ اور $f(z) = 4$

لہٰذا x کی شبیہ 1 , y کی 2 اور z کی 4 ہے۔

نوٹ کیجیے کہ f کے تحت 3 سیٹ A کے کسی رُکن کی شبیہ نہیں ہے۔

1.11.2 تفاعل کی اقسام

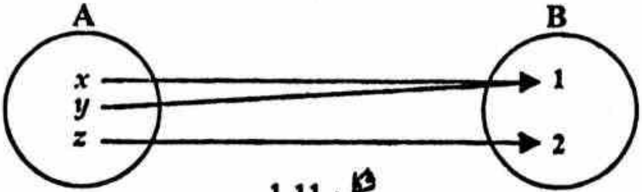
(1) پرتفاعل (Onto Function)

A سے B میں تفاعل f "پرتفاعل" کہلاتا ہے اگر $\text{Range } f = B$

مثال: فرض کیجیے۔ $A = \{x, y, z\}$, $B = \{1, 2\}$ اور $f = \{(x, 1), (y, 1), (z, 2)\}$

چونکہ f تعریف تفاعل کی شرائط (i) اور (ii) پوری کرتا ہے اس لیے A سے B میں f ایک تفاعل ہے مزید یہ کہ $\text{Range } f = \{1, 2\} = B$ اس لیے f ایک "پرتفاعل" ہے۔

نوٹ: اس مثال میں A کے دو ارکان کی شبیہ ایک ہی ہے۔



شکل 1.11

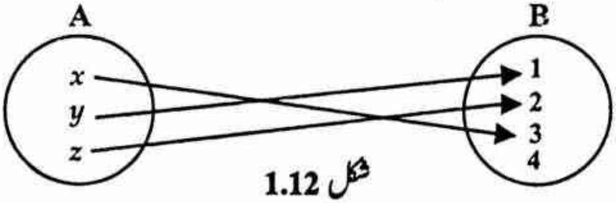
(2) ایک۔ایک تفاعل (One-One Function)

A سے B میں تفاعل، ایک۔ایک تفاعل کہلاتا ہے اگر سیٹ A کا ہر رکن سیٹ B کے ایک رکن سے وابستہ ہو۔ یعنی سیٹ B کا ہر رکن سیٹ A کے ایک سے زیادہ ارکان کی شبیہ نہ ہو۔

مثال: فرض کیجیے۔ $A = \{x, y, z\}$, $B = \{1, 2, 3, 4\}$ اور $f = \{(x, 3), (y, 1), (z, 2)\}$

چونکہ f تعریف تفاعل کی شرائط (i) ، (ii) کو پوری کرتا ہے اس لیے f ایک تفاعل ہے۔

اس مثال میں x کی شبیہ 3 ، y کی 1 اور z کی 2 ہے۔یعنی سیٹ B کا کوئی رکن سیٹ A کے ایک سے زیادہ رکن کی شبیہ نہیں ہے اس لیے f ایک۔ایک تفاعل ہے۔



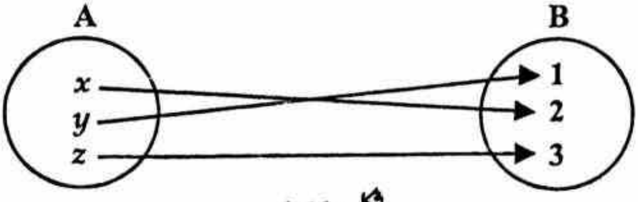
شکل 1.12

(3) ایک۔ ایک 'پر' تفاعل (One-One and Onto Function)

سیٹ A سے B میں تفاعل f ، ایک۔ایک 'پر' تفاعل کہلاتا ہے اگر f ، ایک۔ایک تفاعل کے ساتھ ساتھ 'پر' تفاعل بھی ہو۔

مثال: فرض کیجیے۔ $A = \{x, y, z\}$, $B = \{1, 2, 3\}$ اور $f = \{(x, 2), (y, 1), (z, 3)\}$

چونکہ f ،ایک۔ایک تفاعل کے ساتھ ساتھ 'پر' تفاعل کی شرائط بھی پوری کرتا ہے یعنی $f(x) = 2$, $f(y) = 1$, $f(z) = 3$ اور Range $f = \{1, 2, 3\}$ لہٰذا f ایک۔ایک پر تفاعل ہے۔



شکل 1.13

مشق 1.3

.1 اگر $A = \{a, b, c, d\}$ اور $B = \{y, z\}$ تو مندرجہ ذیل معلوم کیجیے۔

(i) $A \times B$ (ii) $B \times A$ (iii) $A \times A$ (iv) $B \times B$ اور واضح کیجیے کہ عموماً $A \times B \neq B \times A$

.2 اگر $(x + y, 2) = (4, x - y)$ تو x اور y معلوم کیجیے۔

.3 اگر $A = \{a, b\}$ ، $B = \{2, 3\}$ اور $C = \{3, 4\}$ تو مندرجہ ذیل معلوم کیجیے۔

(i) $A \times (B \cup C)$ (ii) $(A \times B) \cup (A \times C)$ (iii) $A \times (B \cap C)$ (iv) $(A \times B) \cap (A \times C)$

.4 سوال نمبر 3 میں دیئے گئے سیٹوں کے لیے مندرجہ ذیل معلوم کیجیے۔

(i) $A \times (B - C)$ (ii) $A \times (C - B)$ (iii) $A \times (B \Delta C)$

.5 اگر $A = \{1, 2, 3, 4\}$ ، $B = \{2, 4, 5, 6\}$ اور $C = \{2, 3, 6, 8\}$ تو مندرجہ ذیل معلوم کیجیے۔

(i) $(A - B) \times (B - C)$ (ii) $(A \cap B) \times (B \cap C)$ (iii) $(A \times B) \cap (B \times C)$

(iv) $(A \times B) - (B \times C)$ (v) $(A \Delta B) \times (B \cap C)$ (vi) $(B \times C) \Delta (C \times A)$

.6 اگر $A = \{a, b, c\}$ اور $B = \{x, y\}$ تو مندرجہ ذیل لکھیے۔

(i) $A \times B$ میں دو روابط (ii) $B \times A$ میں دو روابط

(iii) A میں تین روابط (iv) B میں تمام روابط

.7 اگر سیٹ A کے چار اور سیٹ B کے تین ارکان ہوں تو $A \times B$ کے ثنائی روابط کتنے ہوں گے؟

.8 $A = \{1,2,3,4\}$ سے $B = \{0, 1, 2, 3\}$ میں ربط R کے مترتب جوڑے لکھیے جبکہ $(a,b) \in R$ اگر اور صرف اگر:

(i) $a = b$ (ii) $a + b = 4$ (iii) $a > b$ (iv) a تقسیم کرتا ہے b کو۔

.9 اگر a اور b مثبت صحیح اعداد ہوں تو Z میں مندرجہ ذیل روابط کے حلقہ اثر (Domain) اور زد (Range) معلوم کیجیے۔

$R_1 = \{(a, b) \mid 2a + b = 10\}$, $R_2 = \{(a, b) \mid a + b = 8\}$, $R_3 = \{(a, b) \mid a - b = 8\}$

.10 صحیح اعداد کے سیٹ Z میں $R = \{(a, b) \mid b = 2a\}$ ایک ایسا ربط ہے جس کا حلقہ اثر $\{-1, 0, 1, 2\}$ ہے تو اس کی زد معلوم کیجیے۔

.11 $\{(x, y) \mid y = x^2\}$ ، Z میں ایک ربط ہے جس کا حلقہ اثر Z^+ ہے تو اس کی زد معلوم کیجیے۔

.12 سیٹ $A = \{1, 2, 3, 4\}$ میں مندرجہ ذیل روابط ہیں۔ معلوم کیجیے کہ یہ تفاعل ہیں یا نہیں۔ اگر ہیں تو کس قسم کے؟

$R_1 = \{(1, 2), (2, 3), (3, 4), (4, 1)\}$ $R_2 = \{(1, 2), (3, 4), (4, 1)\}$

$R_3 = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4)\}$ $R_4 = \{(2, 1), (4, 4), (3,1), (2,3)\}$

.13 سیٹ $\{0, 1\}$ کے 16 مختلف ثنائی روابط لکھیے۔ ان میں سے کتنے روابط میں مترتب جوڑا $(0, 1)$ موجود ہوگا؟

.14 اگر $A = \{1, 2, 3\}$ ، $B = \{1, 2, 3, 4\}$ اور $A \times B$ میں روابط $R_1 = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3)\}$ اور $R_2 = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4)\}$ ہوں تو معلوم کیجیے۔

(a) $R_1 \cup R_2$ (b) $R_1 \cap R_2$ (c) $R_1 - R_2$ (d) $R_2 - R_1$ (e) $R_1 \Delta R_2$

.15 اگر $\{a, b, c, d\}$ سے $\{1, 2, 3\}$ میں $f = \{(a, 3), (b, 2), (c, 1), (d, 3)\}$ ایک تفاعل ہے تو کیا f "پر تفاعل" ہے؟ کیا f ایک۔ایک تفاعل ہے؟

.16 اگر $\{a, b, c, d\}$ سے $\{1, 2, 3, 4,\}$ میں $f = \{(a, 3), (b, 2), (c, 1), (d, 3)\}$ ایک تفاعل ہے تو کیا f ایک۔ایک پر تفاعل ہے؟

17. اگر $A = \{1, 2, 3\}$ ہو تو مندرجہ ذیل معلوم کیجیے:

(i) A سے A میں تفاعل f جو کہ ایک۔ایک تفاعل ہو۔

(ii) A سے A میں تفاعل g جو کہ پر تفاعل ہو۔

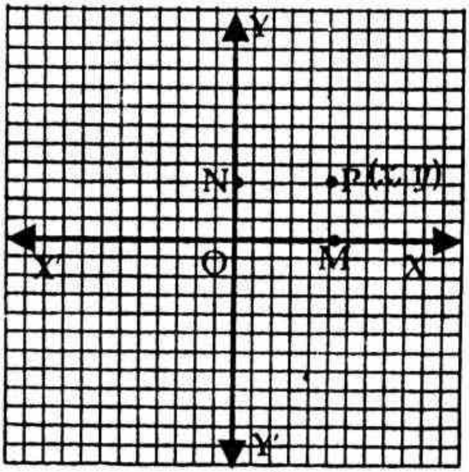
(iii) A سے A میں تفاعل h جو کہ ایک۔ایک پر تفاعل ہو۔

(iv) A سے A میں تفاعل k جو کہ نہ ایک۔ایک ہو اور نہ پر تفاعل ہو۔

1.12 مستوی میں کارتیسی محددی نظام

اس نظام میں دو خطوط اس طرح لیے جاتے ہیں کہ ایک افقی ہو دوسرا عمودی۔ جس نقطہ پر یہ (ایک دوسرے کو) قطع کرتے ہیں مبداء کہلاتا ہے اور O سے ظاہر کیا جاتا ہے۔ افقی خط X - محور اور عمودی خط Y - محور کہلاتا ہے۔ جنہیں عموماً بالترتیب X'OX اور Y'OY سے ظاہر کیا جاتا ہے۔ وہ مستوی جس پر یہ محور واقع ہوں XY - مستوی یا کارتیسی مستوی (Cartesian Plane or xy-plane) کہلاتی ہے۔ ان محوروں پر ایک مخصوص فاصلہ عموماً اکائی کے طور پر لیا جاتا ہے جس کے حوالہ سے ان محوروں سے نقاط کے فاصلوں کی پیمائش کی جاتی ہے۔

مستوی کے ہر نقطہ P سے ہم ایک مترتب جوڑا (x, y) منسوب کرتے ہیں جس میں $x = |\overline{OM}|$ Y - محور سے نقطہ P کا فاصلہ ہے اور $y = |\overline{MP}|$ X - محور سے فاصلہ ہے۔ جیسا کہ مندرجہ ذیل شکل میں دکھایا گیا ہے۔



شکل 1.14

اگر نقطہ P، کو مترتب جوڑے (x, y) سے ظاہر کیا جائے تو اسے $P(x, y)$ لکھتے ہیں۔

$P(x, y)$ میں x اور y نقطہ P کے کارتیسی محددات *(cartesian coordinates)* کہلاتے ہیں۔ x نقطہ P کا x- محدد یا فصلہ *(abscissa)* کہلاتا ہے اور y نقطہ P کا y- محدد یا معینہ *(ordinate)* کہلاتا ہے۔

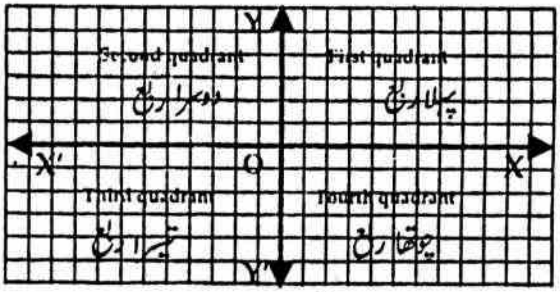
مبداء *(origin)* کے محددات $(0, 0)$ ہوتے ہیں۔

اگر نقطہ P، Y- محور کے دائیں طرف ہو تو x مثبت ہوتا ہے۔ اگر نقطہ P، Y- محور کے بائیں طرف ہو تو x منفی ہوتا ہے۔ اگر نقطہ P، Y- محور پر ہو تو $x = 0$ ہوتا ہے۔

اگر نقطہ P، X- محور سے اوپر ہو تو y مثبت ہوتا ہے۔ اگر نقطہ P، X- محور سے نیچے ہو تو y منفی ہوتا ہے۔ اگر نقطہ P، X- محور پر ہو تو $y = 0$ ہوتا ہے۔

مستوی میں ہر نقطہ کے مطابق حقیقی اعداد کا ایک مترتب جوڑا ہوتا ہے۔ اسی طرح حقیقی اعداد کے مترتب جوڑے کے لیے مستوی میں ایک نقطہ ہوتا ہے۔

دونوں محور مستوی کو چار حصوں میں تقسیم کرتے ہیں۔ ہر حصے کو ربع *(Quadrant)* کہتے ہیں۔ XOY پہلا، X'OY دوسرا، X'OY' تیسرا اور XOY' چوتھا ربع کہلاتا ہے جیسا کہ شکل 1.15 میں دکھایا گیا۔



شکل 1.15

نقطہ $P(x, y)$ کے محددات کی علامات مندرجہ ذیل جدول 1.1 میں دی گئی ہیں۔

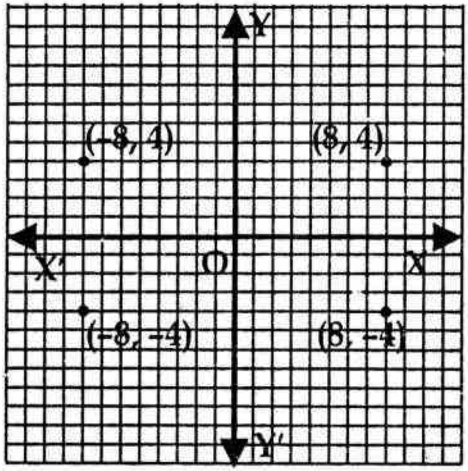
ربع	x	y
I	+	+
II	–	+
III	–	–
IV	+	–

جدول 1.1

نقاط کے محددات کی ترسیم مندرجہ ذیل مثال میں دکھائی گئی ہے۔

مثال: گراف کاغذ پر نقاط (8, 4)، (–8, 4)، (–8, –4) اور (8, –4) کی ترسیم کیجیے۔

حل: ان نقاط کو سامنے دیئے گئے گراف میں دکھایا گیا ہے یہاں نقطہ (8, 4) پہلے ربع میں نقطہ (–8, 4) دوسرے ربع میں نقطہ (–8, –4) تیسرے ربع میں اور نقطہ (8, –4) چوتھے ربع میں واقع ہے۔



شکل 1.16

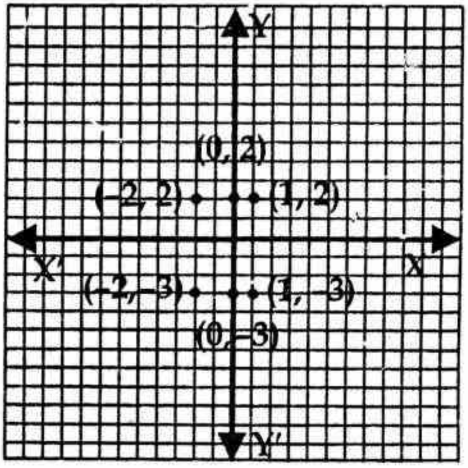
1.13 کارتیسی حاصل ضرب کو گراف کے ذریعے ظاہر کرنا

کسی دو متناہی سیٹوں کے کارتیسی حاصل ضرب کو مرتسم کرنے کی وضاحت مندرجہ ذیل مثال سے جاتی ہے۔

مثال: فرض کیجیے۔ $A = \{-2, 0, 1\}$ ، $B = \{2, -3\}$ تو

$$A \times B = \{(-2, 2), (-2, -3), (0, 2), (0, -3), (1, 2), (1, -3)\}$$

یہ نقاط شکل 1.17 میں مرتسم کیے گئے ہیں۔



شکل 1.17

اس ترسیم سے یہ بات سامنے آتی ہے کہ دو متناہی سیٹوں کے کارتیسی حاصل ضرب کو گراف کاغذ پر مرتسم کیا جاسکتا ہے۔ یہ ترسیم ہمیں یہ سمجھنے میں مدد کرتی ہے کہ کارتیسی حاصل ضرب کے مترتب جوڑوں کو کس طرح ترتیب دیا جاتا ہے۔ اسی طرح ہم کوئی دو غیر متناہی سیٹوں کے کارتیسی حاصل ضرب کو مرتسم کر سکتے ہیں۔ اس حاصل ضرب کی ترسیم ہمیں کارتیسی حاصل ضرب کے نقاط کے عمومی رویے کو سمجھنے میں مدد دیتی ہے۔

مشق 1.4

(1) مندرجہ ذیل ہر نقطہ کے ربع کا تعین کیجیے۔

$(1, 6)$ ، $(\frac{1}{7}, \frac{4}{9})$ ، $(-1.7, 3)$ ، $(\sqrt{3}, -4)$ ، $(\sqrt{2}, -\sqrt{3})$ ، $(-7, -\frac{3}{2})$ ، $(\frac{7}{2}, \frac{1}{2})$

$(-\frac{\sqrt{3}}{2}, -1.7)$ ، $(3, 57)$ ، $(\sqrt{5}, -6.54)$ ، $(27, -72)$ ، $(1.7, -2.7)$ ، $(-1, -11)$ ، $(\sqrt{3}, -1.3)$

(2) مناسب اکائی کا استعمال کرتے ہوئے مندرجہ ذیل کو گراف کاغذ پر ظاہر کیجیے۔

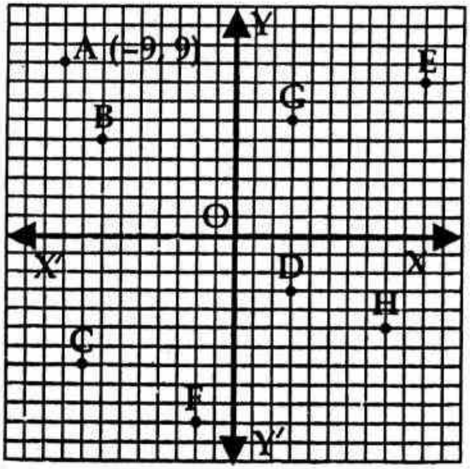
(i) $(4, 6), (6, 2), (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}), (1, 3)$

(ii) $(-3, 4), (-5, 2), (-4, 1), (-\frac{4}{5}, \frac{1}{2}), (-\frac{2}{5}, \frac{2}{5}), (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$

(3) اگر $A = \{x \mid x \in N, 2 \leq x \leq 5\}$ اور $B = \{x \mid x \in Z, -6 < x < -3\}$

تو $A \times B$ ، $B \times A$ اور $A \times A$ معلوم کیجیے اور ان سیٹوں کو گراف کاغذ پر مرتسم کیجیے۔

(4) نیچے دی ہوئی شکل میں نقاط A, B, C, D, E, F, G, H کے محددات معلوم کیجیے۔ مبداء 'O' کے محددات کیا ہوں گے؟



شکل 1.18

متفرق مشق 1

.1 مندرجہ ذیل سیٹوں کو اندراجی شکل میں لکھیے۔

(a) $\{x \mid$ ایک ناطق عدد ہے جبکہ $x^2 = 1\}$

(b) $\{x \mid$ ایک مثبت صحیح عدد ہے جو 12 سے چھوٹا ہے $x\}$

.2 اگر $A = \{2, 4, 6\}$، $B = \{2, 6\}$، $C = \{4, 6\}$ اور $D = \{4, 6, 8\}$ تو معلوم کیجیے کہ ان میں سے کون کس کا تحتی سیٹ ہے۔

.3 مندرجہ ذیل میں ہر سیٹ کے بارے میں بتائیے کہ کیا وہ کسی سیٹ کا قوت سیٹ ہے۔

(a) $\varnothing$ (b) $\{\varnothing, \{a\}\}$ (c) $\{\varnothing, \{a\}, \{\varnothing, a\}\}$ (d) $\{\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$

4 اگر $A = \{a, b, c, d\}$ اور $B = \{y, z\}$ تو معلوم کیجیے:

(a) $A \times B$ (b) $B \times A$ (c) $A \times A$ (d) $B \times B$

.5 اگر کسی نقطے کے محددات (i) دونوں مثبت ہوں (ii) دونوں منفی ہوں تو وہ کارتیسی مستوی کے کس ربع میں واقع ہوگا؟

.6 (a) اُس نقطہ کا y- محدد کیا ہوگا جو X- محور پر ہو؟

(b) اُس نقطہ کا x- محدد کیا ہوگا جو Y- محور پر ہو؟

.7 اگر $A = \{-1, 1\}$ اور $B = \{\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\}$ تو مندرجہ ذیل لکھیے۔

(a) A سے B میں دو ثنائی روابط (b) B سے A میں تین ثنائی روابط

(c) A سے A کے تمام ثنائی روابط (d) B سے B میں چار ثنائی روابط

.8 اگر $S = \{1, 2, 3, 4\}$ اور $T = \{\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \frac{1}{8}\}$ تو مندرجہ ذیل لکھیے۔

(a) S سے T میں ایک-ایک تفاعل (b) S سے T میں پر تفاعل

(c) S سے T میں ایک-ایک پر تفاعل (d) S سے T میں تفاعل جو نہ ایک-ایک ہو اور نہ پر تفاعل ہو۔

.9 اگر $U = \{x \mid$ انگریزی حروف تہجی کا ایک حروف ہے $x\}$

$A = \{a, b, c, d, e, f\}$ ، $B = \{a, e, i, o, u\}$ اور $C = \{u, y, w, x, y, z\}$

تو مندرجہ ذیل سیٹوں کے ارکان لکھیے۔

(a) $A \cap (B \cap C)$ (b) $A \cap (B \cup C)$ (c) $(A \cap B) \cup (A \cap C)$

(d) $A \cap (B \cup C)'$ (e) $A \cap B \cap C'$ (f) $(A \cup B)' \cup C$

مندرجہ بالا ہر سیٹ کی وضاحت وین اشکال سے بھی کیجیے۔

10. مندرجہ ذیل بیانات میں کون سے صحیح ہیں اور کون سے غلط ہیں؟

(i) اگر $A = \{x, y\}$ اور $B = \{y, z, t\}$ تو $A \subseteq B$

(ii) اگر $A = \{1, 2, 3\}$ اور $U = N$ تو $A \cup A = N$

(iii) سیٹ $\{1, \frac{1}{10}, \frac{1}{100}, \ldots, \frac{1}{10^{20}}\}$ ایک غیر متناہی سیٹ ہے۔

(iv) دو غیر مشترک سیٹوں کا تقاطع خالی سیٹ ہوتا ہے۔

(v) 40 اور 42 کے درمیان قدرتی اعداد کا سیٹ خالی سیٹ ہے۔

(vi) $A \cup B = AB$ (vii) $A \times B = B \times A$

(viii) $(2, -3) = (-3, 2)$ (ix) $\varnothing = \{\varnothing\}$

(x) اگر سیٹ A کے m ارکان اور سیٹ B کے n ارکان ہوں تو $A \times B$ میں $m \times n$ مترتب جوڑے ہیں۔

11. جملوں کو مکمل کیجیے۔

(i) $A \cap (B \cup C) =$ .... (ii) $A \Delta B = \{x|$ ....$\}$

(iii) (a, b) .... (b, a) (iv) $(A \cup B)' =$ ....

(v) اگر $(x + 2, 3y - 6) = (2x, y)$ تو $x =$ .... اور $y =$ ....

(vi) اگر f، A سے B میں ایک۔ایک پر تفاعل ہو تو n (B) .... n (A)

(vii) $(-3, -2)$ .... ربع میں ہے۔

(viii) $A = \{2, 4, 8\}$ اور $B = \{2^1, 2^2, 2^3\}$ .... سیٹ ہیں۔

(ix) مستوی کے ہر .... سے حقیقی اعداد کا مترتب جوڑا منسوب کرتے ہیں۔

(x) اگر $R = \{(1, 2), (2, 3), (3, 4)\}$ تو Dom R = ... اور Range R = ...

12. دیئے گئے جوابات میں سے صحیح جواب کا انتخاب کیجیے اور اسے دائرہ لگایئے۔

(i) سیٹ A سے B کے کارتیسی حاصل ضرب کو لکھتے ہیں:

(*a*) $A \cdot B$ (*b*) $A \times B$ (*c*) $A \Delta B$ (*d*) $B \times A$

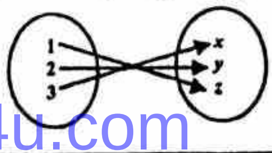
(ii) $\{2, 4, 6, 8, \ldots, 50\}$ کو ترقیم سیٹ ساز میں لکھتے ہیں:

(*a*) $\{x \mid x \in N, x \leq 50\}$ (*b*) $\{x \mid x \in E, x \leq 50\}$

(*c*) $\{x \mid x \in E, 2 \leq x \leq 50\}$ (*d*) $\{x \mid x \in Q, x \leq 50\}$

(iii) $\{0, 1, 2, 3, \ldots\}$، .... کا سیٹ ہے۔

(*a*) مفرد اعداد (*b*) صحیح اعداد (*c*) مکمل اعداد (*d*) جفت اعداد

(iv) 

.... تفاعل کو ظاہر کرتا ہے۔

یونٹ 2

حقیقی اعداد کا نظام، قوت نما اور جذر

2.1 ناطق اعداد کی خصوصیات

ہم سابقہ جماعتوں میں پڑھ چکے ہیں کہ ہر صحیح عدد یا کسر جو $\frac{p}{q}$ کی شکل میں لکھی جا سکے ناطق عدد (Rational Number) ہے۔ بشرطیکہ $p, q \in Z$ اور $q \neq 0$ ہو۔

ہم یہ بھی جانتے ہیں کہ ناطق اعداد جمع اور ضرب کے لحاظ سے مندرجہ ذیل خصوصیات رکھتے ہیں۔

اگر a، b اور c کوئی بھی ناطق اعداد ہوں تو

(i) $a + b$ اور ab بھی ناطق ہیں۔ (خاصیت بندش)

(ii) $a + b = b + a$ اور $ab = ba$ (خاصیت مبادلہ)

(iii) $a + (b + c) = (a + b) + c$ اور $a(bc) = (ab)c$ (خاصیت تلازم)

(iv) $a + 0 = a = 0 + a$ اور $a \times 1 = a = 1 \times a$ (خاصیت ذاتی عناصر)

(v) $a + (-a) = 0 = (-a) + a$ اور $a \neq 0, a \times \frac{1}{a} = 1 = \frac{1}{a} \times a$ (خاصیت معکوس)

(vi) $a(b + c) = ab + ac$; $(b + c)a = ba + ca$ (خاصیت تقسیمی)

2.2 کسورِ اعشاریہ کا ناطق اعداد یا غیر ناطق اعداد ہونا

کسی کسرِ اعشاریہ کو ناطق یا غیر ناطق عدد قرار دینے کے لیے کسورِ اعشاریہ کی مختلف اقسام کا جاننا ضروری ہے۔ جو مندرجہ ذیل ہیں۔

(i) مختتم کسرِ اعشاریہ

ایسی کسرِ اعشاریہ جس کے کسری حصے میں ہندسوں کی تعداد محدود ہو، مختتم کسرِ اعشاریہ (Terminating Decimal Fraction) کہلاتی ہے۔ ایسی کسورِ اعشاریہ آسانی سے $\frac{p}{q}$ کی شکل میں تبدیل کی جا سکتی ہیں۔ جبکہ $p, q \in Z$ اور $q \neq 0$ ہو۔ پس تمام مختتم کسورِ اعشاریہ ناطق ہوتی ہے۔

مثلاً $0.2458 = \frac{2458}{10000}$ ، $25.01 = \frac{2501}{100}$ وغیرہ

(ii) متوالی کسرِ اعشاریہ

ایسی کسرِ اعشاریہ جو غیر مختتم ہو اور جس کے کسری حصے میں چند ہندسے بار بار ایک ہی ترتیب میں آتے ہوں، متوالی کسر اعشاریہ (Recurring Decimal Fraction) کہلاتی ہے۔

ایسی تمام کسور $\frac{p}{q}$ شکل میں بدلی جاسکتی ہیں جبکہ $p, q \in \mathbf{Z}$ اور $q \neq 0$

پس تمام متوالی کسورِ اعشاریہ ناطق اعداد ہوتی ہیں۔

مثال کے طور پر

$$0.3333\ldots = \frac{1}{3}, \qquad 0.142857142\ldots = \frac{1}{7}$$

$$0.16666\ldots = \frac{1}{6}, \qquad 0.0909090\ldots = \frac{1}{11}$$

(iii) غیر مختتم غیر متوالی کسر اعشاریہ

ایسی کسر اعشاریہ جو غیر مختتم ہو اور اس کے کسری حصے میں چند ہندسوں کی تکرار ایک ہی ترتیب سے نہ ہو، غیر مختتم غیر متوالی کسر اعشاریہ (Non-Recurring, Non-Terminating Decimal Fraction) کہلاتی ہے۔ ایسی کسور کو $\frac{p}{q}$ شکل میں نہیں لکھا جاسکتا جبکہ $p, q \in \mathbf{Z}$, $q \neq 0$ ہو۔ پس تمام غیر مختتم غیر متوالی کسورِ اعشاریہ غیر ناطق اعداد (Irrational Numbers) ہوتی ہیں۔

مثال 1. ہر نامکمل مربع عدد کا جذر غیر ناطق عدد ہے۔ مثلاً

$$\sqrt{2} = 1.4142135\ldots, \sqrt{3} = 1.7320508\ldots, \sqrt{5} = 2.2360679\ldots$$

مثال 2. $3.1415926\ldots = \pi = \frac{\text{محیط}}{\text{قطر کی لمبائی}}$ بھی ایک غیر ناطق عدد ہے۔

نوٹ: π کی بالکل ٹھیک قیمت معلوم کرنا ممکن نہیں البتہ اس کی تقریباً قیمت لی جاسکتی ہے۔ مثلاً $\frac{22}{7}$ ، $\frac{157}{50}$ وغیرہ π کی چند تقریباً قیمت ہیں۔

مثال 3. $0.02002000200002\ldots\ldots$ غیر مختتم غیر متوالی کسر اعشاریہ ہے۔ اس لیے کہ 0 اور 2 ایک ہی ترتیب سے اس کسر میں وارد نہیں ہوئے ہیں۔

(i) ناطق اعداد ایسے اعداد ہیں جنھیں مختتم یا متوالی کسر اعشاریہ میں لکھا جاسکتا ہے۔

(ii) غیر ناطق اعداد ایسے اعداد ہیں جنھیں صرف غیر مختتم غیر متوالی کسر اعشاریہ میں لکھا جاسکتا ہے۔

2.3 حقیقی اعداد کا سیٹ

ناطق اعداد کے سیٹ Q اور غیر ناطق اعداد کے سیٹ Q' کے اتصال کو حقیقی اعداد (*Real Number*) کا سیٹ کہا جاتا ہے اور اسے R سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

یعنی $R = Q \cup Q'$ یا $R = \{x \mid x \in Q \vee x \in Q'\}$

Q اور Q' غیر مشترک سیٹ ہیں یعنی $Q \cap Q' = \varnothing$

2.4 حقیقی اعداد کے خواص

2.4.1 حقیقی اعداد کے خواص بلحاظ جمع

(i) خاصیت بندش

کسی بھی دو حقیقی اعداد کا مجموعہ ایک حقیقی عدد ہوتا ہے۔

علامتی طور پر $x, y \in R \Rightarrow x + y \in R$

مثالیں: .1 $16, 24 \in R \Rightarrow 16 + 24 = 40 \in R$

.2 $\frac{4}{3}, \frac{2}{3} \in R \Rightarrow \frac{4}{3} + \frac{2}{3} = \frac{6}{3} = 2 \in R$

.3 $7, \sqrt{5} \in R \Rightarrow 7 + \sqrt{5} = 7 + 2.236\ldots = 9.236\ldots \in R$

(ii) خاصیت مبادلہ

کوئی سے دو حقیقی اعداد x اور y کے لیے $x + y = y + x$

علامتی طور پر $x + y = y + x, \forall\, x, y, \in R,$ (علامت $\forall$ کے معنی ہیں سب کے لیے یا "ہر ایک کے لیے")

مثالیں: .1 $2.6 + 7.2 = 9.8 = 7.2 + 2.6$

.2 $\sqrt{2} + \sqrt{3} = \sqrt{3} + \sqrt{2}$

(iii) خاصیت تلازم

کوئی سے تین حقیقی اعداد x , y اور z کے لیے $x + (y + z) = (x + y) + z$

علامتی طور پر $x + (y + z) = (x + y) + z, \forall\, x, y, z \in R$

مثالیں: .1 $5 + (7 + 8) = 20 = (5 + 7) + 8$

.2 $\sqrt{3} + (\sqrt{6} + \sqrt{7}) = (\sqrt{3} + \sqrt{6}) + \sqrt{7}$

(iv) جمعی ذاتی عنصر

حقیقی اعداد میں عدد "0" ایک ایسا عدد ہے کہ

$x + 0 = 0 + x = x, \forall\, x \in R$

اس لیے عدد "0" حقیقی اعداد کے سیٹ R میں جمعی ذاتی عنصر (*Additive Identity*) کہلاتا ہے۔

مثالیں: .1 $0.4 + 0 = 0 + 0.4 = 0.4$

.2 $\sqrt{2} + 0 = 0 + \sqrt{2} = \sqrt{2}$

(v) جمعی معکوس

ہر حقیقی عدد x کے لیے ایک ایسا حقیقی عدد x' ہوتا ہے کہ

$$x + x' = x' + x = 0$$

ایسا حقیقی عدد x'، حقیقی عدد x کا جمعی معکوس (*Additive Inverse*) کہلاتا ہے۔ اسے "$-x$" سے ظاہر کرتے ہیں۔

مثالیں: .1 $2 + (-2) = (-2) + 2 = 0$ یعنی -2 ، 2 کا جمعی معکوس ہے۔

.2 $\sqrt{3} + (-\sqrt{3}) = (-\sqrt{3}) + \sqrt{3} = 0$ یعنی $-\sqrt{3}$, $\sqrt{3}$ کا جمعی معکوس ہے۔

نوٹ: $-x$ کا جمعی معکوس x ہے یعنی

$$-(-x) = x, \ \forall\, x \in \mathbf{R}$$

2.4.2 حقیقی اعداد کے خواص بلحاظ ضرب

(i) خاصیت بندش

کسی بھی دو حقیقی اعداد کا حاصل ضرب ایک حقیقی عدد ہوتا ہے۔

علامتی طور پر $x, y \in \mathbf{R} \Rightarrow xy \in \mathbf{R}$

مثالیں: .1 $0.6, 0.4 \in \mathbf{R} \Rightarrow (0.6)(0.4) = 0.24 \in \mathbf{R}$

.2 $\frac{2}{9}, \frac{6}{11} \in \mathbf{R} \Rightarrow \frac{2}{9} \times \frac{6}{11} = \frac{12}{99} = \frac{4}{33} \in \mathbf{R}$

.3 $\sqrt{2}, \sqrt{3} \in \mathbf{R} \Rightarrow \sqrt{2} \times \sqrt{3} = \sqrt{6} \in \mathbf{R}$

(ii) خاصیت مبادلہ

کوئی سے دو حقیقی اعداد x اور y کے لیے $xy = yx$

علامتی طور پر $xy = yx, \ \forall\, x, y \in \mathbf{R}$

مثلاً $\sqrt{2} \times \sqrt{3} = \sqrt{6} = \sqrt{3} \times \sqrt{2}$

(iii) خاصیت تلازم

کوئی سے تین حقیقی اعداد x, y اور z کے لیے $x(yz) = (xy)z$

علامتی طور پر $x(yz) = (xy)z, \ \forall\, x, y, z \in \mathbf{R}$

مثالیں: .1 $0.2 \times (\sqrt{3} \times \frac{5}{7}) = (0.2 \times \sqrt{3}) \times \frac{5}{7}$

.2 $0.2 \times (1.5 \times 4) = 1.2 = (0.2 \times 1.5) \times 4$

(iv) ضربی ذاتی عنصر

حقیقی اعداد میں عدد "1" ایک ایسا عدد ہے کہ

$$x \times 1 = 1 \times x = x \quad \forall\, x \in R$$

اس لیے عدد "1" حقیقی اعداد کے سیٹ R میں ضربی ذاتی عنصر *(Multiplicative Identity)* کہلاتا ہے۔

مثلاً $0.2387 \times 1 = 0.2387 = 1 \times 0.2387$ اور $\sqrt{5} \times 1 = \sqrt{5} = 1 \times \sqrt{5}$

مثال: کیا سیٹ $A = \{0, 1\}$ اور $B = \{1, -1\}$ میں سے ہر ایک جمع اور ضرب کے لحاظ سے خاصیت بندش رکھتے ہیں؟

حل: سیٹ A میں خاصیت بندش بلحاظ جمع جانچتے ہیں۔

$$0+0=0 \in A; \quad 1+0=1 \in A; \quad 0+1=1 \in A; \quad 1+1=2 \notin A$$

چونکہ $2 \notin A$, اس لیے A بلحاظ جمع خاصیت بندش نہیں رکھتا۔

اب سیٹ A میں خاصیت بندش بلحاظ ضرب جانچتے ہیں۔

$$1 \times 1 = 1 \in A; \quad 1 \times 0 = 0 \in A; \quad 0 \times 1 = 0 \in A; \quad 0 \times 0 = 0 \in A$$

اس لیے سیٹ A بلحاظ ضرب خاصیت بندش رکھتا ہے۔

اب سیٹ B میں بلحاظ جمع خاصیت بندش جانچتے ہیں۔

$1 + (-1) = 0 \notin B$ اس لیے B بلحاظ جمع خاصیت بندش نہیں رکھتا۔

سیٹ B میں ضرب کے لحاظ سے خاصیت بندش جانچتے ہیں۔

$$(-1)(-1) = 1 \in B; \quad (-1)(1) = -1 \in B; \quad 1(-1) = -1 \in B; \quad 1 \times 1 = 1 \in B$$

اس لیے سیٹ B ضرب کے لحاظ سے خاصیت بندش رکھتا ہے۔

نوٹ: اگر کوئی بھی دو حقیقی اعداد x اور y ہوں تو

(i) $x + (-y) = x - y$ **(ii)** $x \div y = \dfrac{x}{y} = x \times \dfrac{1}{y}, \ (y \neq 0)$

(v) ضربی معکوس

ہر غیر صفر حقیقی عدد x کے لیے ایک ایسا حقیقی عدد x^* موجود ہوتا ہے کہ

$$x \times x^* = x^* \times x = 1$$

ایسے عدد x^* کو x کا ضربی معکوس کہتے ہیں۔ اِسے x^{-1} یا $\dfrac{1}{x}$ بھی لکھتے ہیں۔

پس $x \times x^{-1} = x^{-1} \times x = 1$ یا $x \times \dfrac{1}{x} = \dfrac{x}{x} = \dfrac{1}{x} \times x = 1$

مثالیں: 1. $5 \times \frac{1}{5} = 1 = 5 \times \frac{1}{5}$ یعنی $\frac{1}{5}$ ، 5 کا ضربی معکوس ہے اور 5 عدد $\frac{1}{5}$ کا ضربی معکوس ہے۔

2. $\sqrt{7} \times \frac{1}{\sqrt{7}} = 1 = \frac{1}{\sqrt{7}} \times \sqrt{7}$ اس لیے $\frac{1}{\sqrt{7}}$ ، $\sqrt{7}$ کا ضربی معکوس ہے اور $\sqrt{7}$ ، $\frac{1}{\sqrt{7}}$ کا ضربی معکوس ہے۔

نوٹ: x^{-1} کا ضربی معکوس x ہے یعنی $(x^{-1})^{-1} = x$ جبکہ $x \in R$

2.4.3 ضرب کی خاصیت تقسیمی بلحاظ جمع

کوئی سے تین حقیقی اعداد x , y اور z کے لیے

$$x(y+z) = xy + xz \text{ اور } (y+z)x = yx + zx$$

مثالیں: 1. $\sqrt{2}\left(\frac{1}{3}+\frac{2}{5}\right) = \sqrt{2} \times \frac{1}{3} + \sqrt{2} \times \frac{2}{5}$

2. $\left(\frac{1}{3}+\frac{2}{5}\right)\sqrt{2} = \frac{1}{3} \times \sqrt{2} + \frac{2}{5} \times \sqrt{2}$

2.4.4 خاصیت ثلاثی *(Trichotomy Property)*

کسی بھی دو حقیقی اعداد x اور y کے ملیے مندرجہ ذیل صورتوں میں ایک اور صرف ایک صورت ممکن ہے۔

(i) $x < y$ **(ii)** $x = y$ **(iii)** $x > y$

2.5 حقیقی اعداد کی برابری کے خواص

حقیقی اعداد کے سیٹ R میں مساوی کا ربط تعریف شدہ ہے اسے علامت '=' سے ظاہر کیا جاتا ہے۔ یہ تعلق مندرجہ ذیل خواص رکھتا ہے۔

(i) خاصیت عکسی *(Reflexive Property)*

کسی حقیقی عدد x کے لیے $x = x$

(ii) خاصیت تشاکل *(Symmetric Property)*

کوئی سے بھی دو حقیقی اعداد x اور y کے لیے

$$x = y \Rightarrow y = x$$

(iii) خاصیت متعدیت *(Transitive Property)*

کوئی سے حقیقی اعداد x , y اور z کے لیے

$$x = y,\ y = z \Rightarrow x = z,\ \forall\, x, y, z \in R$$

(iv) جمعی خاصیت *(Additive Property)*

کوئی سے حقیقی اعداد x , y اور z کے لیے

$$x = y \Rightarrow \text{(i) } x + z = y + z \quad \text{(ii) } z + x = z + y$$

یعنی مساوی کے ربط کی دونوں جانب ایک ہی عدد جمع کیا جائے تو اس میں کوئی تبدیلی واقع نہیں ہوتی۔

مثلاً $\frac{6}{2} = 3 \Rightarrow \frac{6}{2} + \frac{1}{2} = 3 + \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{7}{2} = 3\frac{1}{2}$

(v) ضربی خاصیت (Multiplicative Property)

کوئی سے حقیقی اعداد x ، y اور z کے لیے

$x = y \Rightarrow$ (i) $xz = yz$ (دائیں طرف ضرب)

(ii) $zx = zy$ (بائیں طرف ضرب)

یعنی مساوی کے ربط کی دونوں جانب ایک ہی عدد سے ضرب کیا جائے تو اس میں کوئی تبدیلی واقع نہیں ہوتی۔

مثلاً $\frac{6}{2} = 3 \Rightarrow \frac{6}{2} \times \frac{1}{2} = 3 \times \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{3}{2} = \frac{3}{2}$

(vi) خاصیت تنسیخ بلحاظ جمع (Cancellation Property w.r.t. Addition)

$\forall\ x, y, z \in \mathbf{R}, z \neq 0$

(a) $x + z = y + z \Rightarrow x = y$ (دائیں تنسیخ)

(b) $z + x = z + y \Rightarrow x = y$ (بائیں تنسیخ)

مثلاً $0.2 + 0.3 = \frac{1}{5} + 0.3 \Rightarrow 0.2 = \frac{1}{5}$

(vii) خاصیت تنسیخ بلحاظ ضرب (Cancellation Property w.r.t. Multiplication)

$\forall\ x, y, z \in \mathbf{R}, z \neq 0$

(a) $xz = yz \Rightarrow x = y$ (دائیں تنسیخ)

(b) $zx = zy \Rightarrow x = y$ (بائیں تنسیخ)

مثلاً $2x = 2y \Rightarrow x = y \ (z = 2 \neq 0)$

نوٹ: جمعی خاصیت اور خاصیت تنسیخ بلحاظ جمع ایک دوسری کی معکوس ہیں۔ اسی طرح ضربی خاصیت اور خاصیت تنسیخ بلحاظ ضرب ایک دوسری کی معکوس ہیں۔

2.6 حقیقی اعداد کی نابرابری کے خواص

حقیقی اعداد کے سیٹ $\mathbf{R}$ میں ربط "کم ہے" جسے " $<$ " سے ظاہر کیا جاتا ہے تعریف شدہ ہے یعنی کوئی سے حقیقی اعداد x اور y کے لیے ہم لکھتے ہیں: $x < y$ اور پڑھتے ہیں: " x , y سے کم ہے یا چھوٹا ہے" $x < y$ کو $y > x$ بھی لکھا جاسکتا ہے اور اسے پڑھتے ہیں: " y , x سے بڑا ہے"۔ یہ ربط مندرجہ ذیل خواص رکھتا ہے۔

(i) خاصیت ارشمیدس (Archimidean Property)

اگر $x < y$ اور $x > 0$ تو $n > 1$ ایسا قدرتی عدد ہوتا ہے کہ $nx > y$

مثلاً $5 < 14$ کے لیے ہم $n = 3$ لیتے ہیں کہ $3 \times 5 = 15 > 14$

اور $\sqrt{2} < \sqrt{7}$ کے لیے ہم $n = 2$ لیتے ہیں کہ $2 \times \sqrt{2} > \sqrt{7}$

(ii) خاصیت متعدیت (Transitive Property)

کوئی سے حقیقی اعداد x, y اور z کے لیے

$$x < y,\ y < z \Rightarrow x < z$$

مثلاً $\sqrt{2} < \sqrt{3},\ \sqrt{3} < \sqrt{5} \Rightarrow \sqrt{2} < \sqrt{5}$

(iii) جمعی خاصیت (Additive Property)

کوئی سے حقیقی اعداد x, y اور z کے لیے

$$x < y \Rightarrow \text{(i)}\ x + z < y + z \qquad \text{(ii)}\ z + x < z + y$$

مثلاً $2 < 3 \Rightarrow 2 + \sqrt{5} < 3 + \sqrt{5}$ اور $(\sqrt{5}) + 2 < (\sqrt{5}) + 3$

نوٹ: غیر مساوی ربط میں کسی حقیقی عدد کو دونوں طرف جمع کرنے سے اس ربط میں کوئی تبدیلی واقع نہیں ہوتی۔

(iv) ضربی خاصیت (Multiplicative Property)

کوئی سے حقیقی اعداد x, y اور z کے لیے

(a) اگر $z > 0$ تو

$zx < zy$ (بائیں ضرب) ; $x < y \Rightarrow xz < yz$ (دائیں ضرب)

(b) اگر $z < 0$ تو $x < y \Rightarrow xz > yz$

یعنی کسی غیر مساوی ربط کو مثبت حقیقی عدد سے ضرب دینے پر غیر مساوی کی علامت تبدیل نہیں ہوتی لیکن منفی حقیقی عدد کی ضرب سے غیر مساوی کی علامت تبدیل ہو جاتی ہے۔

مثالیں: .1 $2 < 3$ تو $2 \times \frac{1}{2} < 3 \times \frac{1}{2}$ جب کہ $\frac{1}{2} > 0$

پس ضرب دینے سے کوئی تبدیلی نہیں ہوئی۔

.2 $2 < 3$ تو $2\left(-\frac{1}{2}\right) > 3\left(-\frac{1}{2}\right)$ جب کہ $-\frac{1}{2} < 0$

پس ضرب دینے سے علامت میں تبدیلی واقع ہوئی ہے۔

نوٹ: غیر مساوی ربط "$<$" خواص عکسی اور تشاکل نہیں رکھتا ہے۔ یعنی $x \not< x$ اور

$$x < y \Rightarrow y \not< x$$

غیر مساوی ربط "$>$"، غیر مساوی ربط "$<$" کے تمام خواص پر پورا اترتا ہے۔

مشق 2.1

1. مندرجہ ذیل میں حقیقی اعداد کی کون سی خصوصیات استعمال ہوئی ہیں؟ یہاں x ، y ، z حقیقی اعداد کو ظاہر کرتے ہیں۔

(i) $0.4 + 9 = 9 + 0.4$ (ii) $(x+1) + \frac{2}{3} = x + (1 + \frac{2}{3})$

(iii) $1000 + 0 = 1000$ (iv) $\sqrt{8} + (\sqrt{3} + \sqrt{7}) = (\sqrt{8} + \sqrt{3}) + \sqrt{7}$

(v) $6.2 + (-6.2) = 0$ (vi) $x - x = 0$

(vii) $\sqrt{3} \times 11 = 11 \times \sqrt{3}$ (viii) $x(y+z) = xy + xz$

(ix) $\sqrt{5} \times \frac{1}{\sqrt{5}} = 1$ (x) $(\sqrt{3} \times 4) \times \sqrt{6} = \sqrt{3}\ (4 \times \sqrt{6})$

(xi) $(-\sqrt{3}) + \sqrt{3} = 0$

2. مندرجہ ذیل میں حقیقی اعداد کی نابرابری کی کون سی خصوصیات استعمال ہوئی ہیں؟

(i) $-5 < -4 \Rightarrow 0 < 1$ (ii) $-10 < -8 \Rightarrow 20 > 16$

(iii) $1 > -1 \Rightarrow -3 > -5$ (iv) $a < 0 \Rightarrow -a > 0$

(v) $a > b \Rightarrow -a < -b$ (vi) $7 < 8 \Rightarrow -14 > -16$

(vii) $\frac{1}{3} > \frac{1}{4} \Rightarrow -\frac{1}{3} < -\frac{1}{4}$ (viii) $-\frac{1}{4} > -\frac{1}{2} \Rightarrow \frac{5}{4} < \frac{5}{2}$

3. کیا مندرجہ ذیل سیٹوں میں خاصیت بندش بلحاظ جمع اور بلحاظ ضرب ہے؟

(i) $\{0, -1\}$ (ii) $\{0\}$ (iii) $\{1\}$

2.7 قوت نما

ہم جانتے ہیں کہ $3^2 = 3 \times 3$, $3^3 = 3 \times 3 \times 3$, $8^5 = 8 \times 8 \times 8 \times 8 \times 8$

اور $(-3)^8 = (-3)(-3)(-3)(-3)(-3)(-3)(-3)(-3)$

اِس تصور کو ہم کسی بھی حقیقی عدد a اور قدرتی عدد n کے لیے یوں بیان کرسکتے ہیں: "a کا اپنے آپ سے n مرتبہ حاصل ضرب "a^n ہوتا ہے" یعنی (n مرتبہ) $a^n = a \times a \times a \times \ldots\ldots a,$

"a^n کو a کی n ویں قوت کہتے ہیں۔ a کو اساس (Base) اور n کو قوت نما (Exponent) کہتے ہیں۔

مثلاً 9^4 ، 9 کی چوتھی قوت ہے اس میں 9 اساس اور 4 قوت نما ہے۔

اسی طرح $(\frac{1}{3})^4 = \frac{1}{3^4} = 3^{-4}$ میں 3 اساس اور 4 – قوت نما ہے یا $\frac{1}{3}$ اساس اور 4 قوت نما ہے۔

واضح رہے کہ $(-3)^4 = (-3)(-3)(-3)(-3) = 81$

$-(3)^4 = -(3)(3)(3)(3) = -81$

سہولت کے لیے $(3)^4-$ کو 3^4- لکھتے ہیں۔ $(a)^n-$ کو عموماً a^n- لکھتے ہیں۔

مثال: $2(3)^5$ کی قیمت معلوم کیجیے۔

حل: $2(3)^5 = 2(3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3)$

$= 2 \times 243 = 486$

مندرجہ ذیل نتائج ذہن نشین کر لیجیے کہ

(i) اگر a ایک مثبت حقیقی عدد ہے تو a^n مثبت ہوتا ہے۔
مثلاً $(0.5)^2 = 0.25 \ ; \ (0.5)^3 = 0.125 \ ; \ (5)^3 = 125$

(ii) اگر a ایک منفی حقیقی عدد ہے اور n جفت ہے تو a^n مثبت ہوتا ہے۔
مثلاً $(-5)^2 = 25 \ ; \ (-0.5)^2 = 0.25 \ ; \ (-5)^4 = 625$

(iii) اگر a ایک منفی حقیقی عدد ہے اور n طاق ہے تو a^n منفی ہوتا ہے۔
مثلاً $(-2)^5 = -32 \ ; \ (-0.5)^3 = -0.125 \ ; \ (-5)^3 = -125$

2.8 قوانین قوت نما

2.8.1 قوت نماؤں کے حاصل ضرب کا قانون (Law of Product of Powers)

مندرجہ ذیل مثالوں پر غور کیجیے۔

(i) $5^3 \times 5^4 = (5 \times 5 \times 5)(5 \times 5 \times 5 \times 5) = 5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5$

$= 5^7 = 5^{3+4}$

(ii) $(-3)^5 \times (-3)^4 = (-3) \times (-3) \times (-3) \times (-3) \times (-3) \times (-3) \times (-3) \times (-3) \times (-3)$

$= (-3)^9 = -3^{5+4}$

(iii) $\left(\frac{3}{5}\right)^2 \times \left(\frac{3}{5}\right)^5 = \left(\frac{3}{5} \times \frac{3}{5}\right)\left(\frac{3}{5} \times \frac{3}{5} \times \frac{3}{5} \times \frac{3}{5} \times \frac{3}{5}\right)$

$= \left(\frac{3}{5}\right)^7 = \left(\frac{3}{5}\right)^{2+5}$

(iv) $(\sqrt{3})^2 (\sqrt{3})^4 = (\sqrt{3})^{2+4} = (\sqrt{3})^6$

مندرجہ بالا مثالوں سے ہم یہ نتیجہ اخذ کرتے ہیں کہ ایک ہی اساس کے حقیقی اعداد جن کے قوت نما مختلف ہوں، کے حاصل ضرب میں اساس وہی رہتی ہے اور قوت نما جمع کر لیتے ہیں یعنی

$$\boxed{a^m \times a^n = a^{m+n}}$$

جہاں a حقیقی عدد اور m , n قدرتی اعداد ہیں۔

اسی طرح $a^m \times a^n \times a^p = a^{m+n+p}$ ، جبکہ m , n اور p قدرتی عدد ہیں۔

مثال: مختصر کیجیے: $a^5 \times b^3 \times c^8 \times b^{10} \times a^{13} \times c^4$

حل: $a^5 \times b^3 \times c^8 \times b^{10} \times a^{13} \times c^4 = a^5 \times a^{13} \times b^3 \times b^{10} \times c^8 \times c^4$

$$= a^{5+13} \times b^{3+10} \times c^{8+4} = a^{18} \times b^{13} \times c^{12}$$

2.8.2 حاصل ضرب کی قوت کا قانون (Law of Power of Product)

مندرجہ ذیل مثال پر غور کیجیے۔

$$(a \times b)^5 = (a \times b)(a \times b)(a \times b)(a \times b)(a \times b)$$

$$= a \times a \times a \times a \times a \times b \times b \times b \times b \times b = a^5 \times b^5$$

اس سے ہم یہ اخذ کرتے ہیں کہ دو حقیقی اعداد کے حاصل ضرب کی قوت ان اعداد کی قوت کے حاصل ضرب کے برابر ہوتی ہے

یعنی $\boxed{(a \,.\, b)^n = a^n \,.\, b^n}$

جبکہ a ، b حقیقی اعداد ہیں اور n قدرتی عدد ہے۔

اس طرح یہ وضاحت بھی کی جاسکتی ہے کہ

$(abc)^n = a^n b^n c^n$ جبکہ a ، b ، c حقیقی اعداد ہیں اور n قدرتی عدد ہے۔

مشق 2.2

.1 مندرجہ ذیل میں اساس اور قوت نما لکھیے۔

(i) 7^{15} (ii) $(-189)^{10}$ (iii) $(108)^{64}$

.2 بتائیے مندرجہ ذیل میں کون سے مثبت اور کون سے منفی حقیقی عدد ہیں؟

(i) $(8)^4$ (ii) $(-113)^{107}$ (iii) $(-912)^{108}$

.3 $38\,(83)^9$ کی قیمت معلوم کرنے کا صحیح طریقہ کیا ہے؟

(i) ہم پہلے 38 اور 83 کو ضرب کرتے ہیں پھر حاصل ضرب کی 9 ویں قوت معلوم کرتے ہیں؟

(ii) ہم پہلے 83 کی 9 ویں قوت معلوم کرتے ہیں پھر اسے 38 سے ضرب دیتے ہیں۔

مندرجہ ذیل کو مختصر کیجیے۔ (a، b، اور c حقیقی اعداد ہیں)۔

4. $(-91)^4$ 5. $5^4 \times 5^2$ 6. $a^4 \times a^3 \times a^8$

7. $a \times b^2 \times c^3 \times b^3 \times a^5 \times c^2$ 8. $(8 \times 3)^4$

9. $(-4 \times -5)^3$ 10. $(a \times b)^{13}$ 11. $(3 \times y)^5$ 12. $(3 \times 5 \times xy)^{14}$

2.8.3 قوت کی قوت کا قانون (Law of Power of a Power)

مندرجہ ذیل مثالیں ملاحظہ کیجیے۔

(i) $(3^2)^4 = 3^2 \times 3^2 \times 3^2 \times 3^2 = 3^{2+2+2+2}$
$= 3^8$
$= 3^{2\times 4}$

(ii) $(a^5)^2 = a^5 \times a^5 = a^{5+5}$
$= a^{10}$
$= a^{5\times 2}$

(iii) $(b^3)^4 = b^3 \times b^3 \times b^3 \times b^3$
$= b^{3+3+3+3}$
$= b^{12} = b^{3\times 4}$

ان مثالوں سے ہم یہ اخذ کرتے ہیں کہ کسی حقیقی عدد کی اساس کی قوت کی قوت دونوں قوتوں کے حاصل ضرب کے برابر ہوتی ہے۔ مگر اساس میں کوئی تبدیلی واقع نہیں ہوتی۔

یعنی $\boxed{(a^m)^n = a^{m\times n}}$

جبکہ a حقیقی عدد اور m , n قدرتی اعداد ہیں۔

اسی طرح $[(6)^5]^4 = (6)^{5\times 4} = (6)^{20} = 6^{20}$

اور $[(-5)^7]^2 = (-5)^{7\times 2} = (-5)^{14} = 5^{14}$

نیز یہ ثابت کیا جاسکتا ہے کہ

$$[(a^m)^n]^p = (a^{mn})^p = a^{mnp}$$

2.8.4 قوتوں کے حاصل تقسیم کا قانون (Law of Quotient of Powers)

مندرجہ ذیل اظہاریوں کو مختصر کرتے ہیں۔

(i) $\dfrac{a^7}{a^3} = \dfrac{a \times a \times a \times a \times a \times a \times a}{a \times a \times a} = a \times a \times a \times a$

$= a^4 = a^{7-3}$

(ii) $6^5 \div 6^3 = \dfrac{6^5}{6^3} = \dfrac{6 \times 6 \times 6 \times 6 \times 6}{6 \times 6 \times 6}$

$= 6 \times 6 = 6^2 = 6^{5-3}$

ان سے ہم یہ نتیجہ کرتے ہیں کہ قوتوں کے حاصل تقسیم میں ، جبکہ اساس ایک ہی ہو، شمارکنندہ کے قوت نما میں سے مخرج کے قوت نما کو تفریق کیا جاتا ہے اور اساس میں کوئی تبدیلی واقع نہیں ہوتی ہے۔

یعنی $\boxed{\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}}$

جبکہ a کوئی غیر صفر حقیقی عدد ہے اور n , m کوئی سے قدرتی اعداد ہیں۔

نوٹ: (i) اگر $m = n$ تو

$$\frac{a^m}{a^n} = \frac{a^n}{a^n} = a^{n-n} = a^0$$

ہم جانتے ہیں کہ $1 = \dfrac{a^n}{a^n}$ اس لیے $a^0 = 1$

مثلاً $(1001)^0 = 1$, $(225)^0 = 1$, $(-5)^0 = 1$, $(.25)^0 = 1$

(ii) $a^n \times a^{-n} = a^{n-n} = a^0 = 1$

$a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$ اور $a^n = \dfrac{1}{a^{-n}}$

پس $a^{-2} = \dfrac{1}{a^2}$ اور $a^{-1} = \dfrac{1}{a}$

مثال 1. مختصر کیجیے: $\dfrac{(xy)^6}{(xy)^2}$

حل: $\dfrac{(xy)^6}{(xy)^2} = (xy)^{6-2} = (xy)^4 = x^4 y^4$

مثال 2. مختصر کیجیے: $\dfrac{20x^6y^{10}}{4x^4y^6}$

حل: $\dfrac{20x^6y^{10}}{4x^4y^6} = \dfrac{20}{4} \times \dfrac{x^6}{x^4} \times \dfrac{y^{10}}{y^6} = 5x^{6-4}y^{10-6} = 5x^2y^4$

مثال 3. مختصر کیجیے: $\dfrac{(3m+4n)^8\,(l-p)^5}{(3m+4n)^3\,(l-p)^2}$

حل:
$$\frac{(3m+4n)^8\,(l-p)^5}{(3m+4n)^3\,(l-p)^2} = (3m+4n)^{8-3}(l-p)^{5-2}$$
$$= (3m+4n)^5\,(l-p)^3$$

مشق 2.3

مختصر کیجیے:

1. $[(10)^3]^2$
2. $[(2)^3]^2$
3. $[(3^2)]^2$
4. $[(-2)^2]^2$
5. $\dfrac{3^7}{3^2}$
6. $\dfrac{(-4)^4}{(-4)^2}$
7. $\dfrac{a^9}{a^2}$
8. $\dfrac{8a^3b^5}{4ab}$
9. $\dfrac{-21x^6y^9}{3x^2y^5}$
10. $\dfrac{(m+n)^7\,(p+q)^5}{(m+n)^6\,(p+q)^2}$
11. $\dfrac{-20\,(2p-3q)^{12}\,(4-3r)^3}{-4\,(2p-3q)^9\,(4-3r)}$
12. $\dfrac{8(2l+3m)^5\,(4n-2p)^6}{4(2l+3m)^3\,(4n-2p)^4}$
13. $\dfrac{(6a+b)^6\,(3c+d)^5\,(5e-f)^2}{(6a+b)^4\,(3c+d)^2\,(5e-f)}$

2.8.5 کسر کی قوت کا قانون (Law of Power of Quotient)

مثالیں (1)
$$\left(\frac{7}{9}\right)^7 = \left(\frac{7}{9}\right)\left(\frac{7}{9}\right)\left(\frac{7}{9}\right)\left(\frac{7}{9}\right)$$
$$= \frac{7\times7\times7\times7}{9\times9\times9\times9} = \frac{(7)^4}{(9)^4}$$

(2)
$$\left(\frac{a}{b}\right)^5 = \left(\frac{a}{b}\right)\left(\frac{a}{b}\right)\left(\frac{a}{b}\right)\left(\frac{a}{b}\right)$$
$$= \frac{a\times a\times a\times a\times a}{b\times b\times b\times b\times b} = \frac{a^5}{b^5}$$

اس طرح کسی قدرتی عدد n کے لیے

$$\left(\frac{a}{b}\right)^7 = \left(\frac{a}{b}\right)\times\left(\frac{a}{b}\right)\times\left(\frac{a}{b}\right)\times\cdots\cdots\times\left(\frac{a}{b}\right)\ (n\ \text{مرتبہ})$$
$$= \frac{a\times a\times a\times \cdots\cdots \times a\ (n\ \text{مرتبہ})}{b\times b\times b\times \cdots\cdots \times b\ (n\ \text{مرتبہ})} = \frac{a^n}{b^n},\ n\in N$$

پس ہم یہ نتیجہ اخذ کرتے ہیں کہ کسی بھی دو حقیقی اعداد a اور b جبکہ $b \neq 0$ اور کسی بھی قدرتی عدد n کے لیے

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$

اسے کسر کی قوت کا قانون کہتے ہیں۔

نوٹ: $\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \frac{a^{-n}}{b^{-n}} = \frac{b^n}{a^n}$ (کیونکہ $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$)

یعنی $\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$

مثلاً $\left(\frac{7x^2\ y^5\ z^6\ t^4}{u^4\ v^3}\right)^5 = \frac{(7x^2\ y^5\ z^6\ t^4)^5}{(u^4\ v^3)^5} = \frac{7^5 x^{10}\ y^{25}\ z^{30}\ t^{20}}{u^{20}\ v^{15}}$

مشق 2.4

مختصر کیجیے:

1. $\left(\frac{3}{12}\right)^6$ 2. $\left(\frac{-12}{5}\right)^5$ 3. $\left(\frac{a}{b}\right)^6$ 4. $\left(\frac{l}{m}\right)^{-3}$

5. $\left(\frac{8a^2b}{3cd}\right)^{-2}$ 6. $\left(\frac{-3x^3y^2}{2ut}\right)^4$ 7. $\left(\frac{2a^2b^3c^4}{3l^2vw^3}\right)^6$ 8. $\left(\frac{17b^7c^5}{7x^3y^2}\right)^2$

9. $\left(\frac{18x^4y^3z^2}{6ab^2c^5}\right)^3$ 10. $\left(\frac{-30x^{10}y^8}{-5x^3y^2}\right)^2$ 11. $\left(\frac{3a^3b^2c^6}{xyz}\right)^{-5}$ 12. $\left(\frac{12m^4n^3p^2}{6m^2n^2p}\right)^2$

2.9 جذر کا تصور اور مثبت حقیقی عدد کا جذر المربع

پچھلی جماعتوں سے ہم نے قدرتی اعداد کے جذر المربع کو معلوم کرنا سیکھ چکے ہیں۔ مثلاً 4 کا جذر المربع 2 یا 2– ہے کیونکہ $2^2 = 4$ اور $(-2)^2 = 4$ یہاں ہم صرف مثبت جذر المربع لے رہے ہیں۔ اسے خاص جذر المربع (Principal Square Root) کہتے ہیں، عام طور پر کسی مثبت حقیقی عدد q کے لیے q کا جذر المربع $\sqrt{q}$ ہوتا ہے۔

$\sqrt{q}$ کی ترقیم میں $\sqrt{\ }$ کو جذری علامت (Radical Sign) اور q کو مجذور (Radicand) کہتے ہیں۔ پس $\sqrt{q}$ سے مراد کوئی مثبت عدد x ہے جس کا مربع q ہو۔ یعنی $q = x^2$

جذر المربع کی چند خصوصیات یہ ہیں۔

(i) $\sqrt{a} = x \Rightarrow a = x^2,\ a \geq 0$

(ii) $\sqrt{a}\ \sqrt{a} = a,\ a \geq 0$

(iii) $\sqrt{a}\ \sqrt{b} = \sqrt{ab};\ a,\ b \geq 0$

(iv) $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}} = 1,\ a > 0$

(v) $\frac{a}{\sqrt{a}} = \sqrt{a},\ a > 0$

(vi) $\frac{\sqrt{a}}{a} = \frac{1}{\sqrt{a}},\ a > 0$

(vii) $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}},\ b > 0$

(viii) $a\sqrt{b} + c\sqrt{b} = (a+c)\sqrt{b},\ b \geq 0$

نوٹ:۔ ان خصوصیات کو طلباء قوانین قوت نما کی مدد سے ثابت کریں۔

مثال 1. مختصر کیجیے: $2\sqrt{3} + 6\sqrt{3}$

حل: $2\sqrt{3} + 6\sqrt{3} = (2+6)\sqrt{3} = 8\sqrt{3}$

مثال 2. مختصر کیجیے: $\sqrt{8} \times \sqrt{12}$

حل: $\sqrt{8} \times \sqrt{12} = \sqrt{8 \times 12} = \sqrt{96}$

$= \sqrt{\ }$ [illegible] $\times \sqrt{6} = 4\sqrt{6}$

مشق 2.5

مختصر کیجیے:

1. $\sqrt{169}$
2. $\sqrt{180}$
3. $\sqrt{12} \times \sqrt{12}$
4. $\sqrt{16} \times \sqrt{12}$
5. $\sqrt{14} \times \sqrt{21}$
6. $\dfrac{\sqrt{15}}{\sqrt{5}}$
7. $\dfrac{\sqrt{76}}{\sqrt{76}}$
8. $\dfrac{18}{\sqrt{18}}$
9. $\dfrac{2\sqrt{28}}{\sqrt{7}}$
10. $3\sqrt{5} + 8\sqrt{5}$
11. $5\sqrt{8} - 2\sqrt{8}$
12. $34\sqrt{23} + 38\sqrt{23}$

2.10 کسی مثبت حقیقی عدد کا n واں جذر

کسی بھی دو حقیقی اعداد x اور y اور قدرتی عدد n کے لیے اگر $x = y^n$ تو y, x کا خاص n واں جذر کہلاتا ہے۔ اور اسے ظاہر کرتے ہیں۔ $y = \sqrt[n]{x}$

جبکہ " $\sqrt[n]{\ }$ " خاص n ویں جذر کی علامت ہے اور n واں خاص جذر مثبت جذر ہے۔ x "مجذور" اور n جذر کا اشاریہ (*Index*) کہلاتا ہے۔

خیال رہے کہ n ایک مثبت صحیح عدد ہے اور ہم نے ایک مثبت حقیقی عدد کے n ویں جذر کی تعریف کی ہے۔

$\sqrt[n]{x}$ کو $x^{\frac{1}{n}}$ بھی لکھا جاتا ہے۔

مثلاً $\sqrt{16} = 4$, $\sqrt[3]{8} = 2$, $\sqrt[4]{81} = 3$ اور $\sqrt[6]{64} = 2$ بالترتیب 16 , 8 , 81 اور 64 کی خاص جذر المربع، جذر المکعب، چوتھی جذر اور چھٹی جذر ہیں۔

n ویں جذر کے لیے مندرجہ ذیل نتائج بہت اہمیت کے حامل ہیں۔

کسی بھی دو مثبت حقیقی اعداد x اور y اور قدرتی عدد $n > 1$ کے لیے

1. $\sqrt[n]{x} = y \Rightarrow x = y^n$
2. $(\sqrt[n]{x})^n = x$
3. $\sqrt[n]{xy} = \sqrt[n]{x}\,\sqrt[n]{y}$
4. $\dfrac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{x}} = 1, \ (x \neq 0)$

مثال 1. مختصر کیجیے: $\sqrt[5]{243}$

حل:

$$243 = 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 3^5$$

$$\sqrt[5]{243} = \sqrt[5]{3^5} = 3^{5 \times \frac{1}{5}} = 3^1 = 3$$

مثال 2. مختصر کیجیے: $\sqrt[4]{625 \times x^8 y^{12}}$

حل:

$$\sqrt[4]{625 \times x^8 y^{12}} = (5^4)^{\frac{1}{4}} \times (x^8)^{\frac{1}{4}} \times (y^{12})^{\frac{1}{4}}$$

$$= 5^{4 \times \frac{1}{4}} \times x^{8 \times \frac{1}{4}} \times y^{12 \times \frac{1}{4}} = 5x^2y^3$$

مثال 3. مختصر کیجیے: $\sqrt[3]{\dfrac{216\,x^3 y^6}{125\,x^6 z^9}}$

حل:

$$\sqrt[3]{\frac{216\,x^3 y^6}{125\,x^6 z^9}} = \frac{\sqrt[3]{216\,x^3 y^6}}{\sqrt[3]{125\,x^6 z^9}} = \frac{(216x^3 y^6)^{\frac{1}{3}}}{(125\,x^6 z^9)^{\frac{1}{3}}}$$

$$= \frac{6xy^2}{5x^2z^3} = \frac{6y^2}{5xz^3}$$

مشق 2.6

مندرجہ ذیل کے لیے مجذور (*Radicand*) اور اشاریہ (*Index*) لکھیے۔

1. $\sqrt[4]{35}$
2. $\sqrt[5]{\dfrac{xyz}{t}}$
3. $\sqrt[6]{\dfrac{8}{17}}$
4. $\sqrt[n]{\dfrac{p}{q}}$
5. $\sqrt[5]{\dfrac{3xyz}{ut}}$

مختصر کیجیے:

6. $\sqrt[3]{27}$
7. $\sqrt[4]{625}$
8. $\sqrt[8]{a^8 b^8}$
9. $\sqrt{\left(\dfrac{5}{7}\right)^2}$
10. $\left(\sqrt[p]{mn}\right)^p$
11. $\sqrt[3]{\dfrac{81}{125}}$
12. $\dfrac{\sqrt[n]{q}}{\sqrt[m]{q}}$
13. $\sqrt[4]{256a^4 b^4}$
14. $\sqrt[3]{\dfrac{64a^3 b^9}{216c^6 d^{18}}}$

2.11 ناطق قوت نما

کسی حقیقی عدد x اور قدرتی اعداد m , n $(m>1\ ,\ n>1)$ کے لیے $x^{\frac{m}{n}}$ کی تعریف یوں کی جاسکتی ہے۔

$$\boxed{x^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{x^m}}$$

بہ الفاظ دیگر $x^{\frac{m}{n}}$ سے مراد x^m کا n واں جذر ہے۔

صفر اور منفی ناطق قوت کے لیے مندرجہ ذیل تعریف ہے۔

$$x^0 = 1$$

اور $$x^{-\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{x^{-m}}$$

ناطق قوت نما کے لیے مندرجہ ذیل نتائج اہم ہیں۔

اگر x ، y دو مثبت حقیقی اعداد ہیں اور $\frac{m}{n}$ ، $\frac{k}{l}$ ناطق ہیں۔

جبکہ m, n, k, l صحیح اعداد ہوں مگر $n \neq 0$ اور $l \neq 0$ تو

(i) $x^{\frac{m}{n}}\, x^{\frac{k}{l}} = x^{\frac{m}{n}+\frac{k}{l}}$ **(ii)** $\dfrac{x^{\frac{m}{n}}}{x^{\frac{k}{l}}} = x^{\frac{m}{n}-\frac{k}{l}}$ **(iii)** $\left(x^{\frac{m}{n}}\right)^{\frac{k}{l}} = x^{\frac{mk}{nl}}$

(iv) $(xy)^{\frac{m}{n}} = x^{\frac{m}{n}}\, y^{\frac{m}{n}}$ **(v)** $\left(\dfrac{x}{y}\right)^{\frac{m}{n}} = \dfrac{x^{\frac{m}{n}}}{x^{\frac{m}{n}}}$

مثال 1. مختصر کیجیے۔ $(27x^{-\frac{7}{8}})^{\frac{8}{3}}$ جبکہ x مثبت حقیقی عدد ہے۔

حل:

$$\begin{aligned}(27x^{-\frac{7}{8}})^{\frac{8}{3}} &= (27)^{\frac{8}{3}} \times (x^{-\frac{7}{8}})^{\frac{8}{3}}\\ &= (3^3)^{\frac{8}{3}} \times (x^{-\frac{7}{8}})^{\frac{8}{3}}\\ &= 3^{3\times\frac{8}{3}} \times x^{-\frac{7}{8}\times\frac{8}{3}}\\ &= 3^8 \times x^{-\frac{7}{3}}\\ &= \frac{3^8}{x^{\frac{7}{3}}}\end{aligned}$$

مثال 2. مختصر کیجیے۔ $12^{\frac{3}{4}} \times 18^{\frac{4}{5}} \times 24^{\frac{5}{6}}$

حل:

$$12^{\frac{3}{4}} \times 18^{\frac{4}{5}} \times 24^{\frac{5}{6}} = (2\times2\times3)^{\frac{3}{4}} \times (2\times3\times3)^{\frac{4}{5}} \times (2\times2\times2\times3)^{\frac{5}{6}}$$

$$= (2^2\times 3)^{\frac{3}{4}} \times (2\times 3^2)^{\frac{4}{5}} \times (2^3\times 3)^{\frac{5}{6}}$$
$$= 2^{2\times\frac{3}{4}}\times 3^{\frac{3}{4}}\times 2^{\frac{4}{5}}\times 3^{2\times\frac{4}{5}}\times 2^{3\times\frac{5}{6}}\times 3^{\frac{5}{6}}$$
$$= 2^{\frac{3}{2}}\times 3^{\frac{3}{4}}\times 2^{\frac{4}{5}}\times 3^{\frac{8}{5}}\times 2^{\frac{5}{2}}\times 3^{\frac{5}{6}}$$
$$= 2^{\frac{3}{2}+\frac{4}{5}+\frac{5}{2}}\times 3^{\frac{8}{5}+\frac{3}{4}+\frac{5}{6}}$$
$$= 2^{\frac{24}{5}}\times 3^{\frac{191}{60}}$$

مثال 3. مختصر کیجیے۔ $\sqrt[4]{\frac{x^a}{x^b}} \times \sqrt[4]{\frac{x^b}{x^c}} \times \sqrt[4]{\frac{x^c}{x^a}}$

حل:
$$\sqrt[4]{\frac{x^a}{x^b}} \times \sqrt[4]{\frac{x^b}{x^c}} \times \sqrt[4]{\frac{x^c}{x^a}} = \left(\frac{x^a}{x^b}\right)^{\frac{1}{4}}\times\left(\frac{x^b}{x^c}\right)^{\frac{1}{4}}\times\left(\frac{x^c}{x^a}\right)^{\frac{1}{4}}$$
$$= \frac{x^{\frac{a}{4}}}{x^{\frac{b}{4}}}\times\frac{x^{\frac{b}{4}}}{x^{\frac{c}{4}}}\times\frac{x^{\frac{c}{4}}}{x^{\frac{a}{4}}} = 1$$

مشق 2.7

مختصر کیجیے۔

1. $8^{\frac{1}{3}}\times 36^{\frac{1}{2}}$
2. $(64)^{-\frac{1}{6}}$
3. $\left(\frac{256}{x^2}\right)^{\frac{1}{2}}$
4. $(81x^{-8}z^4)^{\frac{1}{4}}$
5. $\dfrac{(27)^{\frac{2n}{3}}\times(8)^{-\frac{n}{3}}}{(18)^{-\frac{n}{2}}}$
6. $\left(\frac{a^p}{a^q}\right)^{-q-p}\times\left(\frac{a^q}{a^r}\right)^{-r-q}\times\left(\frac{a^r}{a^p}\right)^{-p-r}$
7. $\sqrt[4]{\frac{a^x}{a^y}}\times\sqrt[4]{\frac{a^y}{a^r}}\times\sqrt[4]{\frac{a^r}{a^x}}$
8. $\left(\frac{x^l}{x^m}\right)^{l+m}\times\left(\frac{x^m}{x^n}\right)^{m+n}\times\left(\frac{x^n}{x^l}\right)^{n+l}$
9. $\left(\frac{p^a}{p^b}\right)^{a+b-c}\times\left(\frac{p^b}{p^c}\right)^{b+c-a}\times\left(\frac{p^c}{p^a}\right)^{a+c-b}$
10. $\left(\frac{(125)^2\times(8)}{(64)^2}\right)^{\frac{1}{3}}$
11. $\dfrac{4^m\times 15^{4m-2n+1}\times 9^{n-2m}}{10^{2m}\times 25^{m-n}}$
12. $\sqrt{\dfrac{(216)^{\frac{2}{3}}(25)^{\frac{1}{2}}}{\left(\frac{1}{25}\right)^{-\frac{3}{2}}}}$
13. $\dfrac{2^{\frac{1}{3}}.\ 12^{\frac{1}{2}}.\ 27^{\frac{1}{3}}.\ 5^{\frac{1}{2}}}{10^{\frac{1}{2}}.\ 4^{-\frac{1}{3}}.\ 18^{\frac{1}{2}}.\ 81^{\frac{1}{4}}}$
14. $4^{3^2}\div 4^{2^3}$

2.12 اَصَم (Surds)

ایسا اظہاریہ جس کی کم از کم ایک رقم میں جذری علامت ہو اصم یا مقدار اصم کہلاتا ہے۔

مثلاً $\sqrt{a}$, $\sqrt{2}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{\frac{3}{8}}$ اصم ہیں۔

نکات:

.1 اگر $\sqrt[n]{a}$ ایک غیر ناطق عدد ہو اور 'a' مکمل n ویں قوت نہ ہو ایسی صورت میں اسے n درجی اصم کہیں گے۔

مثلاً $\sqrt{3}$ دو درجی اصم ہے۔ $\sqrt[4]{9}$ ایک 4 درجی اصم ہے۔

$\sqrt[3]{27} = 3$ اصم نہیں ہے اس لیے کہ $27 = 3^3$

.2 دو رقمی اظہاریہ جس میں کم از کم ایک رقم اصم ہو 'دو رقمی اصم' (Binomial Surds) کہلاتا ہے۔

مثلاً $2 + \sqrt{3}$, $\sqrt{5} - \sqrt{2}$ دو رقمی اصم ہیں۔

.3 اگر $a \neq 0$ ، $b \neq 0$ 'x' , y مکمل مربع نہ ہوں تو $a\sqrt{x} - b\sqrt{y}$ اور $a\sqrt{x} + b\sqrt{y}$ دونوں مزدوج دو رقمی اصم (Conjugate Binomial Surds) کہلاتے ہیں۔ ان میں سے ہر ایک دوسرے کا زوج کہلاتا ہے۔

.4 زوج جوڑے کا حاصل ضرب ناطق عدد ہوتا ہے۔

مثلاً $(a\sqrt{x} + b\sqrt{y})(a\sqrt{x} - b\sqrt{y}) = a^2x - b^2y$

مثال 1. $\frac{1}{5-\sqrt{3}}$ کو ایسی شکل میں لکھیے کہ مخرج میں جذری علامت نہ ہو۔

حل:

$$\frac{1}{5-\sqrt{3}} = \frac{1}{5-\sqrt{3}} \times \frac{5+\sqrt{3}}{5+\sqrt{3}} \quad \left(\text{مخرج کے زوج سے ضرب اور تقسیم کیا}\right)$$

$$= \frac{5+\sqrt{3}}{(5)^2 - (\sqrt{3})^2}$$

$$= \frac{5+\sqrt{3}}{25 - 3} = \frac{5+\sqrt{3}}{22} = \frac{5}{22} + \frac{\sqrt{3}}{22}$$

نوٹ: وہ عمل جس میں کسی اظہاریے کے مخرج میں جذری علامت ختم کی جائے یعنی مخرج کو ناطق بنانے کا عمل ناطقانہ (Rationalization) کہلاتا ہے۔

مثال 2. اگر $x = 7 + 4\sqrt{3}$ تو $x - \frac{1}{x}$ ، $x + \frac{1}{x}$ ، $x^2 - \frac{1}{x^2}$ اور $x^2 + \frac{1}{x^2}$ کی قیمت معلوم کیجیے۔

حل:

کیونکہ $x = 7 + 4\sqrt{3}$

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{7+4\sqrt{3}} = \frac{1}{7+4\sqrt{3}} \times \frac{7-4\sqrt{3}}{7-4\sqrt{3}} \quad (\text{مخرج کو ناطق بنانے کا عمل})$$

$$= \frac{7-4\sqrt{3}}{(7)^2-4^2(\sqrt{3})^2} = \frac{7-4\sqrt{3}}{49-48}$$

$$= \frac{7-4\sqrt{3}}{1} = 7-4\sqrt{3}$$

اب $x-\frac{1}{x} = (7+4\sqrt{3})-(7-4\sqrt{3})$

یا $x-\frac{1}{x} = 7+4\sqrt{3} - 7+4\sqrt{3} = 8\sqrt{3} \quad \ldots(1)$

$x+\frac{1}{x} = (7+4\sqrt{3})+(7-4\sqrt{3}) = 14 \quad \ldots(2)$

(1) کے دونوں اطراف مربع کرنے سے

$$\left(x-\frac{1}{x}\right)^2 = \left(8\sqrt{3}\right)^2$$

یا $x^2+\frac{1}{x^2}-2 = 192$

یا $x^2+\frac{1}{x^2} = 192+2$

یا $x^2+\frac{1}{x^2} = 194 \quad \ldots(3)$

مساوات (1) اور (2) کو ضرب دینے سے

$$x^2-\frac{1}{x^2} = \left(x+\frac{1}{x}\right)\left(x-\frac{1}{x}\right)$$

$$= 14\,(8\sqrt{3})$$

$$= 112\sqrt{3} \quad \ldots(4)$$

مشق 2.8

1. مندرجہ ذیل کے مخرج کو ناطق بنائیے۔

(i) $\frac{1}{2+\sqrt{3}}$ (ii) $\frac{1}{3-2\sqrt{2}}$ (iii) $\frac{1}{5+2\sqrt{6}}$

2. اگر $x=2+\sqrt{3}$ تو $x+\frac{1}{x}$ اور $x^2+\frac{1}{x^2}$ کی قیمتیں معلوم کیجیے۔

3. اگر $p=3+2\sqrt{2}$ تو $p+\frac{1}{p}$ اور $p^2+\frac{1}{p^2}$ کی قیمتیں معلوم کیجیے۔

4. اگر $q=\sqrt{2}+\sqrt{3}$ تو $q-\frac{1}{q}$ اور $q^2+\frac{1}{q^2}$ کی قیمتیں معلوم کیجیے۔

.5 اگر $y = \sqrt{5} - 2$ تو $y + \frac{1}{y}$ ، $y - \frac{1}{y}$ اور $y^2 - \frac{1}{y^2}$ کی قیمتیں معلوم کیجیے۔

.6 اگر $a = \sqrt{10} + 3$ تو $a + \frac{1}{a}$ ، $a - \frac{1}{a}$ اور $a^2 - \frac{1}{a^2}$ کی قیمتیں معلوم کیجیے۔

.7 اگر $\frac{1}{x} = 7 + 4\sqrt{3}$ تو $x^2 + \frac{1}{x^2}$ اور $x^2 - \frac{1}{x^2}$ کی قیمتیں معلوم کیجیے۔

.8 اگر $\frac{1}{b} = 2 + \sqrt{3}$ تو $b^4 + \frac{1}{b^4}$ کی قیمت معلوم کیجیے۔

.9 اگر $x = \sqrt{5} + 2$ تو $x^4 + \frac{1}{x^4}$ کی قیمت معلوم کیجیے۔

.10 اگر $q = \sqrt{2} + \sqrt{3}$

(a) $q^4 + \frac{1}{q^4}$ کی قیمت معلوم کیجیے۔

(b) q کا زوج معلوم کیجیے اور تصدیق کیجیے کہ q اور اس کے زوج کا حاصل ضرب ناطق عدد ہے۔

.11 اصم کا درجہ معلوم کیجیے۔

$$\sqrt[3]{\frac{5}{7}} \text{ ، } \sqrt[4]{\frac{4}{9}} \text{ ، } \sqrt[3]{\frac{4}{9}} \text{ ، } \sqrt[4]{25} \text{ ، } \sqrt[3]{25}$$

متفرق مشق II

.1 مندرجہ ذیل سیٹوں میں سے کون سے خاصیت بندش رکھتے ہیں بلحاظ:

(i) جمع (ii) تفریق (iii) ضرب (iv) تقسیم

(a) **N** (b) **Z** (c) **Q** (d) **R**

(e) جفت اعداد کا سیٹ (f) طاق اعداد کا سیٹ

.2 مندرجہ ذیل میں حقیقی اعداد کی کون سی خاصیت استعمال ہوئی ہے۔

(i) $4 > 2 \Rightarrow 12 > 6$ (ii) $\frac{1}{8} > \frac{1}{10} \Rightarrow \frac{1}{4} > \frac{1}{5}$

(iii) $9 > 7 \Rightarrow -7 > -9$ (iv) $\sqrt{3} < \sqrt{5} \Rightarrow 2\sqrt{3} < 2\sqrt{5}$

.3 مندرجہ ذیل بیانات میں کون سے صحیح ہیں؟

(i) $a^2 > 0 \ , \ a \in \mathbf{R}, \forall a \neq 0$ (ii) $a^3 < 0 \ , \ \forall a < 0 \ , \ a \in \mathbf{R}$

(iii) $(-3)^7 > 0$ (iv) $(-3)^8 < 0$

(v) $aaa = a+a+a,\ a \in \mathbf{R}$　　(vi) $\frac{1}{a}+\frac{1}{a}+\frac{1}{a}=\left(\frac{1}{a}\right)^3,\ a \neq 0$

(vii) $a^{-1}=\frac{1}{a}\ ,\ a \neq 0$

.4 مختصر کیجیے:

(i) $\left[\left(\frac{1}{3}\right)^2\right]^4$　　(ii) $\left(\frac{a}{b^2}\right)^3,\ a, b \in \mathbf{R}$ اور $b \neq 0$

(iii) $(a^3)^4$　　(iv) $[(-8)^4]^6$

(v) $(-x)^2\ (-x)^3\ (-x)^4$　　(vi) $\left(-\frac{m}{t}\right)^2\left(-\frac{m}{t}\right)\ m, t \in \mathbf{R}$ اور $t \neq 0$

.5 مندرجہ ذیل کو مختصر کیجیے۔

(i) $\sqrt{3}\,(\sqrt{3}+\ 2\sqrt{12})$　　(ii) $\sqrt{7}\ \sqrt{6}\ \sqrt{42}$

(iii) $\sqrt{6}\,(4\sqrt{24}\ -\sqrt{2}\sqrt{3})$

.6 مندرجہ ذیل کے مخرج سے جذری علامت کو ختم کرتے ہوئے مختصر کیجیے۔

(i) $\frac{\sqrt{128}}{\sqrt{2}}$　　(ii) $\frac{\sqrt{2}\,(4+\sqrt{3})}{\sqrt{8}}$

.7 مندرجہ ذیل بیانات میں کون سے صحیح اور کون سے غلط ہیں؟

(i) $\sqrt{-25} = -5$

(ii) چونکہ $-64 = 8\ (-8)$ اس لیے $\sqrt{-64} = -8$

(iii) اگر $x = 0$ ہے تو $\sqrt{x} = 0$

(iv) $\sqrt{a+b} = \sqrt{a}+\sqrt{b}$

(v) $\sqrt{ab} = \sqrt{a}\ \sqrt{b}$

.8 مختصر کیجیے:

(i) $\left(\frac{x^{2a}}{x^{a+b}}\right)\left(\frac{x^{2b}}{x^{b+c}}\right)\left(\frac{x^{2c}}{x^{c+a}}\right),\ x \neq 0,\ x \in \mathbf{R}$

(ii) $\left(\frac{x^a}{x^b}\right)^{a^2+ab+b^2}\left(\frac{x^b}{x^c}\right)^{b^2+bc+c^2}\left(\frac{x^c}{x^a}\right)^{c^2+ca+a^2},\ x \neq 0,\ x \in \mathbf{R}$

(iii) $\sqrt{\frac{x^a}{x^b}} \times \sqrt{\frac{x^b}{x^c}} \times \sqrt{\frac{x^c}{x^a}}\ ,\ a, b, c \in \mathbf{Z}$ اور $x \neq 0,\ x \in \mathbf{R}$

.9 مخرج کو ناطق بنائیے۔

(i) $\frac{1}{3+\sqrt{10}}$ (ii) $\frac{1}{4+3\sqrt{2}}$

.10 اگر $y = 3-2\sqrt{2}$ تو $y^2 + y^{-2}$ کی قیمت معلوم کیجیے۔

.11 مختصر کیجیے:

(i) $\frac{\sqrt{x+2}+\sqrt{x-2}}{\sqrt{x+2}-\sqrt{x-2}}$ (ii) $\frac{x+\sqrt{x^2-a^2}}{x-\sqrt{x^2-a^2}}$, $(a \neq 0)$

(iii) $\frac{1}{2-\sqrt{4-x^2}} - \frac{1}{2+\sqrt{4-x^2}}$; $(x \neq 0)$

یونٹ 3

لوگرتھم

3.1 تعارف

عظیم مسلمان ریاضی داں ابومحمد موسیٰ الخوارزمی نے لوگرتھم کو متعارف کرایا تھا۔ ان کے بعد سترہویں صدی عیسوی میں جان نیپئر (*John Napier*) نے لوگرتھم کے تصور کو مزید واضح کیا اور اس کے لیے جدول تیار کیے۔ ان جدول میں بنیاد ''e'' استعمال کی گئی۔ ''e'' ایک غیر ناطق عدد ہے جس کی تقریباً قیمت ...2.71828 ہے۔ عظیم ریاضی داں ایولر (*Euler*) نے عدد ''e'' کی خصوصیات دریافت کی تھیں اس لیے اس عدد کو ان کے نام کے پہلے حرف ''e'' سے ظاہر کیا جاتا ہے۔ پروفیسر ہنری برگس (*Henry Briggs*) نے 1631ء میں 10 کی بنیاد والے جدول تیار کیے۔ لوگرتھم کے استعمال نے طویل اور دشوار حسابی عمل کو مختصر اور بہت آسان کر دیا ہے۔

لوگرتھم کی تعریف کرنے سے پہلے ہم اعداد کے لکھنے کی سائنسی ترقیم پر بحث کرتے ہیں۔

3.2 سائنسی ترقیم

بہت بڑے اور بہت چھوٹے اعداد کو مختصر طریقہ سے لکھنا سائنسی ترقیم ہے۔ دیئے گئے اعداد کی تقریباً قیمتیں عموماً سائنسی ترقیم میں لکھی جاتی ہیں۔ ریاضی اور سائنس کی دیگر شاخوں میں انتہائی چھوٹے اور بڑے اعداد سے واسطہ پڑتا ہے مثلاً

(1) 0.00000057

(2) 56,78,93,00,15,759

(3) زمین کا وزن 6,000,000,000,000,000,000,000,000 کلوگرام ہے۔

(4) الیکٹران کا وزن 0.000,000,000,000,000,000,000,000,000,000,910,905 کلوگرام ہے۔

سہولت کی خاطر ایسے اعداد کو ہم ایک خاص ترقیم میں لکھتے ہیں جسے سائنسی ترقیم کہا جاتا ہے۔ اس ترقیم میں دیے ہوئے عدد کو دو اعداد کے حاصل ضرب کی شکل میں لکھا جاتا ہے۔ جس میں پہلا عدد ایک یا ایک سے بڑا لیکن دس سے چھوٹا ہوتا ہے اور دوسرا 10 کی کوئی قوت ہوتا ہے۔ یعنی اگر دیا ہوا عدد 'n' ہو تو اس کی سائنسی ترقیم $n = s \times 10^m$ جبکہ $1 \le s < 10$ اور m ایک صحیح عدد ہے۔ مندرجہ ذیل مثال سے اس کی وضاحت کی جاتی ہے۔

مثال 1. 7,530,000 کو سائنسی ترقیم میں لکھیے۔

حل: 7,530,000 کو سائنسی ترقیم میں لکھنے کے لیے اس کو دو اعداد کے حاصل ضرب کی شکل میں لکھا جاتا ہے۔ عدد میں بائیں طرف سے پہلے غیر صفر ہندسے کے بعد نقطۂ اعشاریہ لگا کر پہلا جزو ضربی حاصل کیا جاتا ہے۔ دوسرا جزو ضربی 10 کی قوت ہوتا ہے جبکہ قوت نما ان ہندسوں کی تعداد کے برابر ہوتا ہے جو نقطۂ اعشاریہ کے اصل مقام سے نئے مقام کے درمیان ہوتے ہیں واضح ہو کہ یہاں نقطۂ اعشاریہ اس کے اصل مقام کے بائیں جانب ہے تو اس صورت میں قوت نما مثبت لیا جاتا ہے اور اگر اصل مقام کے دائیں جانب ہو تو قوت نما منفی لیا جاتا ہے۔

$$7.530{,}000 = 7.53 \times 10^6$$

یا

$$\begin{aligned} 7530000 &= 753 \times 10000 \\ &= 75.3 \times 10 \times 10000 \\ &= 7.53 \times 10^1 \times 10^1 \times 10^4 \\ &= 7.53 \times 10^{1+1+4} \\ &= 7.53 \times 10^6 \end{aligned}$$

مثال 2. 0.000000953 کو سائنسی ترقیم میں لکھیے۔

حل: اس صورت میں نقطۂ اعشاریہ اصل مقام سے دائیں جانب لگایا جائے گا اس لیے قوت نما منفی لیا جائے گا۔

$$0.000000953 = 9.53 \times 10^{-7}$$

یا

$$\begin{aligned} 0.000000953 &= \frac{953}{1000000000} \\ &= \frac{95.3 \times 10}{10^9} \\ &= \frac{9.53 \times 10^1 \times 10^1}{10^9} \\ &= 9.53 \times 10^{1+1-9} \\ &= 9.53 \times 10^{-7} \end{aligned}$$

مثال 3. الیکٹران کی کمیت کو سائنسی ترقیم میں لکھیے۔

حل: الیکٹران کی کمیت = 0,00000000000000000000000000000911 کلوگرام ہوتا ہے جس کی سائنسی ترقیم 9.11×10^{-28} ہے۔

یاد رکھیے:

(1) 10 کا قوت نما نقطۂ اعشاریہ کے اصل مقام سے نئے مقام کے درمیان ہندسوں کی تعداد گن کر حاصل کیا جاتا ہے۔

(2) اگر نقطۂ اعشاریہ اس کے اصل مقام سے بائیں جانب لگایا جائے تو قوت نما مثبت ہوتا ہے۔

(3) اگر نقطۂ اعشاریہ اس کے اصل مقام سے دائیں جانب لگایا جائے تو قوت نما منفی ہوتا ہے۔

(4) اگر کوئی عدد سائنسی ترقیم میں ہو تو اسے معیاری شکل میں لکھا ہوا بھی کہتے ہیں۔

مثال 4. سورج سے زمین کا فاصلہ 15,00,00,000 کلومیٹر ہے۔ اسے سائنسی ترقیم میں لکھیے۔

حل: $15,00,00,000 = 15 \times 10000000 = 1.5 \times 10^1 \times 10^7 = 1.5 \times 10^{1+7} = 1.5 \times 10^8$

پس سورج سے زمین کا فاصلہ سائنس ترقیم میں 1.5×10^8 کلومیٹر ہے۔

اگر کوئی عدد سائنسی ترقیم میں لکھا ہوا ہو تو اسے سادہ یا عام شکل میں لکھا جا سکتا ہے۔ اس کے لیے پہلے جزو ضربی میں نقطۂ اعشاریہ کو 10 کے قوت نما کے برابر ہندسوں کے بعد لگایا جاتا ہے۔ اگر قوت نما مثبت ہے تو نقطۂ اعشاریہ دائیں جانب حرکت کرتا ہے اور اگر قوت نما منفی ہے تو اس کی حرکت بائیں جانب ہوتی ہے۔ اس کی وضاحت مندرجہ ذیل مثالوں سے کی جاتی ہے۔

مثال 5. مندرجہ ذیل کو عام صورت میں لکھیے۔

(i) 5.375×10^8 (ii) 6.75×10^{-9}

حل:

(i) $5.375 \times 10^8 = 537500000$

یا $5.375 \times 10^8 = 5375 \times 10^{-3} \times 10^8$

$= 5375 \times 10^{-3+8}$

$= 5375 \times 10^5$

$= 5375 \times 100000$

$= 537500000$

(ii) $6.75 \times 10^{-9} = 0.00000000675$

یا $6.75 \times 10^{-9} = 675 \times 10^{-2} \times 10^{-9}$

$= 675 \times 10^{-11}$

$= 0.00000000675$

مشق 3.1

مندرجہ ذیل اعداد کو سائنسی ترقیم میں لکھیے۔

(1) 68.75 (2) 5373.458 (3) 756837 (4) 0.053

(5) 0.0007689 (6) 7000000 (7) 89000000 (8) 0.000000015

مندرجہ ذیل اعداد کو عام صورت میں لکھیے۔

(9) 2.576×10^{7} (10) 7.0056×10^{-8} (11) 1.3×10^{-9} (12) 1×10^{13}

(13) چاند کے قطر کی پیمائش 3500 کلومیٹر ہے اسے سینٹی میٹر میں تبدیل کر کے سائنسی ترقیم میں لکھیے۔

(14) سورج کے مرکز میں 15,000,000 ڈگری سینٹی گریڈ درجہ حرارت ہوتا ہے۔ اسے سائنسی ترقیم میں لکھیے۔

3.3 لوگرتھم کی تعریف

فرض کیجیے a , x اور y حقیقی اعداد ہوں جبکہ $a > 0$ اور $a \neq 1$ اگر $x = a^y$ تو x کا لوگرتھم اساس a پر y ہوتا ہے اور اسے لکھتے ہیں $\log_a x = y$

اس سے واضح ہوتا ہے کہ $x = a^y$ اور $\log_a x = y$ مترادف مساواتیں ہیں۔ $x = a^y$ دیے ہوئے بیان کی قوت نمائی شکل ہے اور $\log_a x = y$ اسی بیان کی لوگرتھمی شکل ہے۔

مثالیں:

(1) $81 = 3^4$ کی لوگرتھمی شکل یہ ہے $\log_3 81 = 4$ یعنی 81 کا لوگرتھم اساس 3 پر 4 ہے۔

(2) $10 = 10^1$، $100 = 10^2$، $1000 = 10^3$ وغیرہ لہٰذا $\log_{10} 10 = 1$ ، $\log_{10} 100 = 2$ ، $\log_{10} 1000 = 3$ وغیرہ

واضح رہے کہ اگر $a = 1$ تو مساوات $x = a^y$ کا کوئی ایک حل نہیں ہوتا ہے۔ مثلاً $1^2 = 1$ ، $1^3 = 1$ ، $1^4 = 1$ وغیرہ یعنی y کی کوئی بھی قیمت یعنی 1 یا 2 یا 3 وغیرہ ہو سکتی ہے۔ شرط $a > 0$ یہ بتاتی ہے کہ x ہمیشہ حقیقی ہوگا۔

اگر $x = 1$ تو a کی تمام قیمتوں کے لیے $a^0 = 1$ لہٰذا کسی اساس a کے لیے $\log_a 1 = 0$

> 1 کا لوگرتھم کسی اساس پر صفر ہوتا ہے

اگر $x = a$ تو $a = a^1$ ، لہٰذا $\log_a a = 1$

> اساس کا لوگرتھم خود پر 1 ہوتا ہے

مثال 1. مندرجہ ذیل کو لوگرتھمی شکل میں لکھیے۔

(i) $2^2=4$ (ii) $4^3=64$ (iii) $4^{-2}=\frac{1}{16}$ (iv) $(\frac{1}{5})^{-2}=25$

حل: (i) چونکہ $2^2=4$ لہٰذا $\log_2 4=2$ (ii) چونکہ $4^3=64$ لہٰذا $\log_4 64=3$

(iii) چونکہ $4^{-2}=\frac{1}{16}$ لہٰذا $\log_4 \frac{1}{16}=-2$ (iv) چونکہ $(\frac{1}{5})^{-2}=25$ لہٰذا $\log_{\frac{1}{5}} 25=-2$

مثال 2. مندرجہ ذیل کو قوت نما کی شکل میں لکھیے۔

(i) $\log_3 27=3$ (ii) $\log_{10} 100=2$ (iii) $\log_{\frac{1}{2}} 4=-2$

(iv) $\log_6 \frac{1}{36}=-2$ (v) $\log_{10} \frac{1}{1000}=-3$

حل: (i) چونکہ $\log_3 27=3$ لہٰذا $3^3=27$ (ii) چونکہ $\log_{10} 100=2$ لہٰذا $10^2=100$

(iii) چونکہ $\log_{\frac{1}{2}} 4=-2$ لہٰذا $(\frac{1}{2})^{-2}=4$ (iv) چونکہ $\log_6 \frac{1}{36}=-2$ لہٰذا $6^{-2}=\frac{1}{36}$

(v) چونکہ $\log_{10} \frac{1}{1000}=-3$ لہٰذا $10^{-3}=\frac{1}{1000}$

مثال 3. اگر $\log_7 x=2$ تو x کی قیمت معلوم کیجیے۔

حل: چونکہ $\log_7 x=2$

لہٰذا $7^2=x$

یا $x=49$

مثال 4. اگر $\log_a 625=4$ تو a کی قیمت معلوم کیجیے۔

حل: چونکہ $\log_a 625=4$

لہٰذا $625=a^4$

یا $5^4=a^4$

پس $a=5$ (قوت نما مساوی ہیں)

مثال 5. اگر $\log_{10} 1000=y$ تو y کی قیمت معلوم کیجیے۔

حل: چونکہ $\log_{10} 1000=y$

لہٰذا $10^y=1000$

یا $10^y=10^3$

پس $y=3$ (اساس مساوی ہیں)

مثال 6. $32\sqrt[5]{4}$ کا لوگرتھم اساس $2\sqrt{2}$ پر معلوم کیجیے۔

حل: فرض کیا کہ $\log_{2\sqrt{2}}(32\sqrt[5]{4}) = x$

تو $(2\sqrt{2})^x = 32\sqrt[5]{4}$

$$\Rightarrow \left(2\times 2^{\frac{1}{2}}\right)^x = 32\,(4)^{\frac{1}{5}}$$

$$\Rightarrow \left(2^{1+\frac{1}{2}}\right)^x = 32\,(2^2)^{\frac{1}{5}}$$

$$\Rightarrow \left(2^{\frac{3}{2}}\right)^x = 2^5 . 2^{\frac{2}{5}}$$

$$\Rightarrow 2^{\frac{3}{2}x} = 2^{5+\frac{2}{5}}$$

$$\Rightarrow 2^{\frac{3}{2}x} = 2^{\frac{27}{5}}$$

$$\Rightarrow \frac{3}{2}x = \frac{27}{5}$$

$$\Rightarrow x = \frac{18}{5} \quad \Rightarrow \quad x = 3.6$$

مشق 3.2

مندرجہ ذیل میں سے ہر ایک کو لوگرتھمی شکل میں لکھیے:

(1) $2^5 = 32$ (2) $2^{-7} = \frac{1}{128}$ (3) $10^{-2} = 0.01$

(4) $36^{\frac{3}{2}} = 216$ (5) $10^5 = 100000$

مندرجہ ذیل میں سے ہر ایک کو قوت نمائی شکل میں لکھیے:

(6) $\log_5 25 = 2$ (7) $\log_{27} 81 = \frac{4}{3}$ (8) $\log_2 \frac{1}{8} = -3$

(9) $\log_{10} 1 = 0$ (10) $\log_{10} 0.001 = -3$

مندرجہ ذیل میں x کی قیمت معلوم کیجیے:

(11) $\log_{32} x = -\frac{1}{5}$ (12) $\log_4 x = -\frac{3}{2}$ (13) $\log_{10} x = -4$

مندرجہ ذیل میں a کی قیمت معلوم کیجیے:

(14) $\log_a 3 = \frac{1}{2}$ (15) $\log_a \frac{1}{25} = -\frac{2}{3}$ (16) $\log_a 1 = 0$

مندرجہ ذیل میں y کی قیمت معلوم کیجیے:

(17) $\log_{\sqrt{5}} 25 = y$ (18) $\log_{10} 100 = y$ (19) $\log_{55} 55 = y$

لوگرتھم معلوم کیجیے:

(20) 1728 کا اساس $2\sqrt{3}$ پر (21) 125 کا اساس $5\sqrt{5}$ پر (22) 0.0001 کا اساس 0.001 پر

مندرجہ ذیل کی قیمت معلوم کیجیے:

(23) $\log_8 128$ (24) $\log_{27} \frac{1}{81}$ (25) $\log_{343} 49$

3.4 لوگرتھم کے قوانین

ہم لوگرتھم کے تین قوانین بیان اور ثابت کریں گے جن کا استعمال طویل حسابی عمل کو مختصر کر دے گا۔

پہلا قانون: حقیقی اعداد m , n اور a جبکہ $a > 0$, $a \neq 1$ کے لیے

$$\log_a mn = \log_a m + \log_a n$$

> دو حقیقی اعداد کے حاصل ضرب کا لوگرتھم اُن کے لوگرتھم کے مجموعے کے برابر ہوتا ہے۔

ثبوت: فرض کیجیے۔ $\log_a m = x$ اور $\log_a n = y$ تو $m = a^x$ اور $n = a^y$

اب $mn = a^x \; a^y$

$= a^{x+y}$ (قانونِ قوت نما)

$= \log_a mn = x + y$

پس $\log_a mn = \log_a m + \log_a n$

دوسرا قانون: حقیقی اعداد m , n اور a جبکہ $a > 0$ اور $a \neq 1$ کے لیے

$$\log_a \frac{m}{n} = \log_a m - \log_a n$$

> دو حقیقی اعداد کے حاصل تقسیم کا لوگرتھم ان کے لوگرتھم کے فرق کے برابر ہوتا ہے۔

ثبوت: فرض کیجیے۔ $\log_a m = x$ اور $\log_a n = y$ تو $m = a^x$ اور $n = a^y$

$\Rightarrow \frac{m}{n} = \frac{a^x}{a^y}$

$= a^{x-y}$ (قانونِ قوت نما)

$\Rightarrow \log_a \frac{m}{n} = x - y$

لہٰذا $\Rightarrow \log_a \frac{m}{n} = \log_a m - \log_a n$

تیسرا قانون: حقیقی اعداد m , n اور a جبکہ $a > 0$ اور $a \neq 1$ کے لیے

$$\log_a m^n = n \log_a m$$

ثبوت: فرض کیجیے۔ $\log_a m = x$ تو $m = a^x$

اب $m^n = (a^x)^n$

$= a^{nx}$ (قانون قوت نما)

$\Rightarrow \log_a m^n = nx$

پس $\log_a m^n = n\log_a m$

کسی حقیقی عدد جس کا قوت نما n ہو، کا لوگرتھم اُس کے لوگرتھم اور قوت نما n کے حاصل ضرب کے برابر ہوتا ہے۔

مثال 1. $\log_a x^3 z^{\frac{4}{5}}$ کو $\log_a x$ اور $\log_a z$ میں تحویل کیجیے۔

حل:

$$\log_a x^3 z^{\frac{4}{5}} = \log_a x^3 + \log_a z^{\frac{4}{5}} \qquad (\because \log_a mn = \log_a m + \log_a n)$$

$$= 3\log_a x + \frac{4}{5}\log_a z \qquad (\because \log_a m^n = n\log_a m)$$

مثال 2. مختصر کیجیے۔ $\log_a \frac{75}{16} - 2\log_a \frac{5}{9} + \log_a \frac{32}{243}$

حل:

$$\log_a \frac{75}{16} - 2\log_a \frac{5}{9} + \log_a \frac{32}{243} = \log_a \frac{75}{16} - \log_a \left(\frac{5}{9}\right)^2 + \log_a \frac{32}{243}$$

$$= \log_a \left(\frac{75}{16} \times \frac{32}{243}\right) - \log_a \left(\frac{5}{9}\right)^2$$

$$= \log_a \left(\frac{\frac{75}{16} \times \frac{32}{243}}{\frac{25}{81}}\right) = \log_a 2$$

مثال 3. $d^x . c^{-2x} = b^{3x+1}$ تو x معلوم کیجیے۔

حل: $d^x . c^{-2x} = b^{3x+1}$

دونوں اطراف لوگرتھم اساس a پر لینے سے

$$\log_a (d^x . c^{-2x}) = \log_a b^{3x+1}$$

$$\Rightarrow \log_a d^x + \log_a c^{-2x} = \log_a b^{3x+1}$$

$$\Rightarrow x\log_a d - 2x\log_a c = (3x+1)\log_a b$$

$$\Rightarrow x\log_a d - 2x\log_a c = 3x\log_a b + \log_a b$$

$$\Rightarrow x\log_a d - 2x\log_a c - 3x\log_a b = \log_a b$$

$$\Rightarrow x(\log_a d - 2\log_a c - 3\log_a b) = \log_a b$$

$$\Rightarrow x = \frac{\log_a b}{\log_a d - 2\log_a c - 3\log_a b)} = \frac{\log_a b}{\log_a \frac{d}{c^2 b^3}}$$

3.5 لوگرتھم میں اساس کی تبدیلی کا اصول

لوگرتھم میں اساس کی تبدیلی کا اصول یوں بیان کیا جاتا ہے۔

$$\log_a n = \frac{\log_b n}{\log_b a}$$

ثبوت: فرض کیجیے $\log_a n = x$

لہٰذا $n = a^x$

دونوں اطراف کا لوگرتھم اساس b پر لینے سے

$$\log_b n = \log_b a^x$$

$$= x \log_b a \qquad (\because \log_a m^n = n \log_a m)$$

$$\Rightarrow \qquad x = \frac{\log_b n}{\log_b a}$$

پس $\log_a n = \dfrac{\log_b n}{\log_b a}$ ... (1)

3.5.1 نتیجہ صریح: $\log_a b \,.\, \log_b a = 1$

ثبوت: مساوات (1) میں $n = b$ لینے سے

$$\log_a b = \frac{\log_b b}{\log_b a}$$

$$= \frac{1}{\log_b a} \qquad (\because \log_b b = 1)$$

پس $\log_a b \,.\, \log_b a = 1$

یہ صریح نتیجہ براہ راست بھی ثابت کیا جاسکتا ہے جیسا کہ ذیل میں ہے۔

فرض کیجیے $\log_a b = x$

تو $a^x = b$

دونوں اطراف لوگرتھم اساس b پر لینے سے

$$\log_b a^x = \log_b b$$

$$\Rightarrow \quad x \log_b a = 1 \qquad (\because \log_b b = 1)$$

پس $\log_a b \,.\, \log_b a = 1$

مثال1. ثابت کیجیے۔ $\log_a b \times \log_b c \times \log_c a = 1$

ثبوت: لوگرتھم میں اساس کی تبدیلی کا اصول استعمال کرتے ہوئے ہر اساس کو ایک ہی اساس یعنی a میں تبدیل کیجیے۔

$$\text{L.H.S.} = \log_a b \times \log_b c \times \log_c a$$
$$= \log_a b \times \frac{\log_a c}{\log_a b} \times \frac{\log_a a}{\log_a c}$$
$$= \log_a a = 1 = \text{R.H.S} \quad (\because \log_a a = 1)$$

مثال2. ثابت کیجیے $\log_a n = \log_b n \,.\, \log_a b$

ثبوت:
$$\text{L.H.S} = \log_a n$$
$$= \frac{\log_b n}{\log_b a} \qquad \left(\because \log_a n = \frac{\log_b n}{\log_b a}\right)$$
$$= \log_b n \,.\, \log_a b \quad (\because \log_a b \,.\, \log_b a = 1)$$
$$= \text{R.H.S.}$$

مشق 3.3

مندرجہ ذیل کو $\log_a x$, $\log_a y$, $\log_a z$ میں تحویل کیجیے۔

(1) $\log_a \frac{x^3 y}{z^2}$

(2) $\log_a \sqrt{xy^2 z}$

(3) $\log_a \left(\sqrt[3]{x^{-1}\sqrt{y^3}} \div \sqrt{y^3\sqrt{x}}\right)$

(4) $\log_a \frac{x\sqrt{y^3}}{\sqrt[3]{z^2 x^5}}$

(5) $\log_a \left\{\left(\frac{yz^{-2}}{y^{-4} z^3}\right)^{-3} \div \left(\frac{y^{-1}z}{y^2 z^{-3}}\right)^5\right\}$

(6) $\log_a \frac{\sqrt[5]{xy^{-1}z^{-2}}}{(x^{-1}y^{-2}z^{-3})^{\frac{1}{6}}}$

ثابت کیجیے:

(7) $\log_a \frac{\sqrt[4]{5}\,.\,\sqrt[10]{2}}{\sqrt[3]{18}\,\sqrt{2}} = \frac{1}{4}\log_a 5 - \frac{11}{15}\log_a 2 - \frac{2}{3}\log_a 3$

مندرجہ ذیل کو مختصر کر کے ایک رقم میں لکھیے۔

(8) $\log_a 20 - \log_a 15 + \frac{1}{2}\log_a \frac{9}{16}$

(9) $\frac{1}{3}\log_a (x-1)^3 + \frac{10}{9}\log_a (x+1) - \frac{1}{9}\log_a (x+1)$

ثابت کیجیے:

(10) $\log_b m = \log_a m \,.\, \log_b a$

(11) $\log_b a \times \log_c b \times \frac{1}{\log_c a} = 1$

(12) $\log_a b \times \log_c a = \log_c b$

3.6 عام لوگرتھم (Common Logarithms)

اساس 10 پر لوگرتھم کو عام لوگرتھم کہتے ہیں۔ عام لوگرتھم کو برِگز لوگرتھم (Briggs Logarithms) بھی کہا جاتا ہے۔ انھیں ان سوالات میں جو کہ حسابی عمل سے متعلق ہوں استعمال کیا جاتا ہے۔ لیکن اعلیٰ ریاضی کی بہت سی شاخوں میں اساس 'e' پر لوگرتھم استعمال کیا جاتا ہے جسے قدرتی لوگرتھم بھی کہا جاتا ہے۔ قدرتی لوگرتھم کو نیپیرئن لوگرتھم (Naperian Logarithms) بھی کہا جاتا ہے کسی حقیقی عدد m کے قدرتی لوگرتھم کو $\log_e m$ لکھتے ہیں عام طور پر اِسے $ln\, m$ بھی لکھا جاتا ہے۔

اس کتاب میں صرف قدرتی لوگرتھم پر بحث ہوگی اس لیے آئندہ ہم اساس کا ذکر نہیں کریں گے اور سمجھا جائے گا کہ اساس 10 استعمال ہو رہی ہے یعنی $\log_{10} n$ کے بجائے صرف $\log n$ لکھا جائے گا۔

کسی عدد n کی سائنسی ترقیم $n = s \times 10^m$ میں جبکہ $1 \le s < 10$ اور m ایک صحیح عدد ہے۔ n کا عام لوگرتھم معلوم کرنے کے لیے دونوں اطراف کا لوگرتھم لیتے ہیں۔

$$\log n = \log (s \times 10^m)$$

$$= \log s + \log 10^m \quad (\because \log_a mn = \log_a m + \log_a n)$$

$$= \log s + m \log 10 \quad (\because \log_a m^n = n \log_a m)$$

$$= \log s + m \quad (\because \log 10 = 1)$$

$$= m + \log s \qquad \ldots (1)$$

اس مساوات سے معلوم ہوا کہ کسی عدد n کا لوگرتھم صحیح عدد m اور $\log s$ کا مجموعہ ہوتا ہے۔

مساوات (1) میں صحیح عدد m (سائنسی ترقیم میں 10 کا قوت نما) n کے لوگرتھم کا خاصہ (Characteristic) کہلاتا ہے اور $\log s$ جبکہ $1 \le s < 10$ مینٹیسہ (Mantissa) کہلاتا ہے۔

چونکہ $1 \le s < 10$

لہٰذا $\log 1 \le \log s < \log 10$

پس $0 \le \log s < 1 \; (\because \log 1 = 0 \,;\, \log 10 = 1) \quad \ldots (2)$

اس سے ظاہر ہوتا ہے کہ عام لوگرتھم کا عشری یا مینٹیسہ (Mantissa) ایک غیر منفی عدد ہے جو کہ ایک سے چھوٹا ہے۔

پس خاصہ عام لوگرتھم کا صحیح عددی حصہ اور مینٹیسہ اس کا اعشاری حصہ ہوتا ہے۔

واضح رہے کہ خاصہ صحیح عدد ہے اس لیے مثبت بھی ہوسکتا ہے اور منفی بھی لیکن مینٹیسہ کیونکہ اعشاری حصہ ہے اس لیے ہمیشہ مثبت ہوتا ہے۔
سائنسی ترقیم میں لکھے بغیر ہم کسی عدد کے لوگرتھم کا خاصہ مندرجہ ذیل دو اُصولوں کی مدد سے معلوم کر سکتے ہیں۔

پہلا اُصول: خاصہ مثبت ہوتا ہے اور عددی لحاظ سے نقطہ اعشاریہ سے پہلے (بائیں طرف) ہندسوں کی تعداد سے ایک کم ہوتا ہے۔

دوسرا اُصول: خاصہ منفی ہوتا ہے اور عددی لحاظ سے نقطہ اعشاریہ کے فوراً بعد (دائیں طرف) صفروں کی تعداد سے ایک زیادہ ہوتا ہے۔

مینٹیسہ کو عام لوگرتھم کی جدول سے معلوم کرتے ہیں۔ اِس طریقہ کار کی وضاحت ہم مندرجہ ذیل مثالوں سے کرتے ہیں۔

مثال 1. $\log 4689$ معلوم کیجیے۔

حل: $\log 4689$ کا خاصہ معلوم کرنے کے لیے ہم پہلے دیے گئے عدد 4689 کو سائنسی ترقیم میں لکھتے ہیں۔

$$4689 = 4.6\,89 \times 10^3$$

پس $\log 4689$ کا خاصہ 3 ہے۔

عدد 4689 کو سائنسی ترقیم میں لکھے بغیر ہم مندرجہ بالا پہلے اصول کی مدد سے $\log 4689$ کا خاصہ معلوم کر سکتے ہیں۔
پہلے اُصول کے مطابق $\log 4689$ کا خاصہ 3 ہے۔

پس $\log 4689 = 3 + \log 4.689$

مینٹیسہ یعنی $\log 4.689$ معلوم کرنے کے لیے ہم نقطہ اعشاریہ کو نظر انداز کر دیتے ہیں اور یوں عدد 4689 حاصل ہوتا ہے۔ اب ہم لوگرتھم کی جدول کی (بائیں سے) پہلے کالم (*Column*) میں عدد 46 کو تلاش کرتے ہیں۔ جیسا کہ تیر کے نشان ($\rightarrow$) سے دکھایا گیا ہے۔ اس کے بعد جدول کی (اوپر سے) پہلی سطر (*Row*) میں عدد 8 تلاش کرتے ہیں جیسا کہ تیر کے نشان ($\downarrow$) سے دکھایا گیا ہے۔

لوگرتھم کی جدول

فرق والے کالم

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	0000	0043	0086	0128	0170	0212	0253	0294	0334	0374	4 4	9 8	13 12	17 16	21 20	26 24	30 28	34 32	38 36
11	0414	0453	0492	0531	0569	0607	0645	0682	0719	0755	4 4	8 7	12 11	15 15	19 19	23 22	27 26	31 30	35 33
12	0792	0828	0864	0899	0934	0969	1004	1038	1072	1106	3 3	7 7	11 10	14 14	18 17	21 20	25 24	28 27	32 31
13	1139	1173	1206	1239	1271	1303	1335	1367	1399	1430	3 3	7 7	10 10	13 13	16 16	20 19	23 22	26 25	30 29
14	1461	1492	1523	1553	1584	1614	1644	1673	1703	1732	3 3	6 6	9 9	12 12	15 15	19 17	22 20	25 23	28 26
15	1761	1790	1818	1847	1875	1903	1931	1959	1987	2014	3 3	6 6	9 8	11 11	14 14	16 17	20 19	23 22	26 24
16	2041	2068	2095	2122	2148	2175	2201	2227	2253	2279	3 3	5 5	8 8	11 10	14 13	17 16	19 18	22 21	24 23
17	2304	2330	2355	2380	2405	2430	2455	2480	2504	2529	3 2	5 5	8 7	10 10	13 12	15 15	18 17	20 20	23 22
18	2553	2577	2601	2625	2648	2672	2695	2718	2742	2765	2 2	5 5	7 7	9 9	12 11	14 14	16 16	19 18	21 21
19	2788	2810	2833	2856	2878	2900	2923	2945	2967	2989	2 2	4 4	7 6	9 8	11 11	13 13	16 15	18 17	20 19
20	3010	3032	3054	3075	3096	3118	3139	3160	3181	3201	2	4	6	8	11	13	15	17	19
21	3222	3243	3263	3284	3304	3324	3345	3365	3385	3404	2	4	6	8	10	12	14	16	18
22	3424	3444	3464	3483	3502	3522	3541	3560	3579	3598	2	4	6	8	10	12	14	15	17
23	3617	3636	3655	3674	3692	3711	3729	3747	3766	3784	2	4	6	7	9	11	13	15	17
24	3802	3820	3838	3856	3874	3892	3909	3927	3945	3962	2	4	5	7	9	11	12	14	16
25	3979	3997	4014	4031	4048	4065	4082	4099	4116	4133	2	3	5	7	9	10	12	14	15
26	4150	4166	4183	4200	4216	4232	4249	4265	4281	4298	2	3	5	7	8	10	11	13	15
27	4314	4330	4346	4362	4378	4393	4409	4425	4440	4456	2	3	5	6	8	9	11	13	14
28	4472	4487	4502	4518	4533	4548	4564	4579	4594	4609	2	3	5	6	8	9	11	12	14
29	4624	4639	4654	4669	4683	4698	4713	4728	4742	4757	1	3	4	6	7	9	10	12	13
30	4771	4786	4800	4814	4829	4843	4857	4871	4886	4900	1	3	4	6	7	9	10	11	13
31	4914	4928	4942	4955	4969	4983	4997	5011	5024	5038	1	3	4	6	7	8	10	11	12
32	5051	5065	5079	5092	5105	5119	5132	5145	5159	5172	1	3	4	5	7	8	9	11	12
33	5185	5198	5211	5224	5237	5250	5263	5276	5289	5302	1	3	4	5	6	8	9	10	12
34	5315	5328	5340	5353	5366	5378	5391	5403	5416	5428	1	3	4	5	6	8	9	10	11
35	5441	5453	5465	5478	5490	5502	5514	5527	5539	5551	1	2	4	5	6	7	9	10	11
36	5563	5575	5587	5599	5611	5623	5635	5647	5658	5670	1	2	4	5	6	7	8	10	11
37	5682	5694	5705	5717	5729	5740	5752	5763	5775	5786	1	2	3	5	6	7	8	9	10
38	5798	5809	5821	5832	5843	5855	5866	5877	5888	5899	1	2	3	5	6	7	8	9	10
39	5911	5922	5933	5944	5955	5966	5977	5988	5999	6010	1	2	3	4	5	7	8	9	10
40	6021	6031	6042	6053	6064	6075	6085	6096	6107	6117	1	2	3	4	5	6	8	9	10
41	6128	6138	6149	6160	6170	6180	6191	6201	6212	6222	1	2	3	4	5	6	7	8	9
42	6232	6243	6253	6263	6274	6284	6294	6304	6314	6325	1	2	3	4	5	6	7	8	9
43	6335	6345	6355	6365	6375	6385	6395	6405	6415	6425	1	2	3	4	5	6	7	8	9
44	6435	6444	6454	6464	6474	6484	6493	6503	6513	6522	1	2	3	4	5	6	7	8	9
45	6532	6542	6551	6561	6571	6580	6590	6599	6609	6618	1	2	3	4	5	6	7	8	9
46	6628	6637	6646	6656	6665	6675	6684	6693	6702	6712	1	2	3	4	5	6	7	7	8
47	6721	6730	6739	6749	6758	6767	6776	6785	6794	6803	1	2	3	4	5	5	6	7	8
48	6812	6821	6830	6839	6848	6857	6866	6875	6884	6893	1	2	3	4	4	5	6	7	8
49	6902	6911	6920	6928	6937	6946	6955	6964	6972	6981	1	2	3	4	4	5	6	7	8

وہ سطر جسے نشان ($\rightarrow$) اور وہ کالم جسے نشان ($\downarrow$) سے ظاہر کیا گیا ہے۔ اُن کے سنگم پر ہمیں عدد 6702 ملتا ہے۔ وہ سطر جس میں یہ عدد ہے، اور فرق والے کالموں میں 9 والے کالم کے سنگم پر ہمیں عدد 8 ملتا ہے۔ 6702 میں 8 جمع کرنے سے ہمیں 6710 حاصل ہوتا ہے۔

لہٰذا $\log 4.689 = 0.6710$ جو کہ مطلوبہ مینٹیسہ ہے۔

پس $\log 4689 = 3 + 0.6710 = 3.6710$

مثال 2. $\log 3.8$ معلوم کیجیے۔

حل: پہلے اصول کے مطابق $\log 3.8$ کا خاصہ 0 ہے۔

لہٰذا $\log 3.8 = 0 + \log 3.800$

مینٹیسہ معلوم کرنے کے لیے نقطہ اعشاریہ کو نظر انداز کریں تو ہمیں عدد 3800 حاصل ہوتا ہے۔

لوگرتھم کی جدول کے پہلے بائیں کالم میں 38 تلاش کیا اور سب سے اوپر والی سطر میں 0 کے نیچے والے کالم اور 38 والی سطر کے سنگم پر عدد 5798 حاصل ہوا۔ فرق والے کالموں میں 0 کا کالم نہیں ہے اس لیے 5798 میں کچھ بھی جمع نہیں کریں گے۔

پس $\log 3.8 = 0 + 0.5798 = 0.5798$

مثال 3. 0.0000225 کا لوگرتھم معلوم کیجیے۔

حل: 0.0000225 کی سائنسی ترقیم 2.25×10^{-5} ہے اور دوسرے اصول کے مطابق $\log 0.0000225$ کا خاصہ -5 ہے۔ اس لیے $\log 0.0000225 = -5 + \log 2.250$

$$= -5 + 0.3522$$

چونکہ خاصہ منفی ہے اس لیے اس منفی نشان کو 5 کے اوپر لگاتے ہیں یعنی اس طرح : $\bar{5}$

$\log 0.0000225 = \bar{5}.3522$ جسے پڑھتے ہیں: "بار پانچ اعشاریہ تین پانچ دو، دو"

$\bar{5}.3522$ اور -5.3522 کا فرق اچھی طرح سمجھ لینا چاہیے۔

اول الذکر کے معنٰی $-5 + 0.3522$ ہیں جو کہ -4.6478 کے برابر ہے اور موخرالذکر کے معنٰی $-5 - 0.3522$ ہیں جو کہ غلط ہے کیونکہ عشری یا مینٹیسہ (*Mantissa*) ہمیشہ مثبت ہوتا ہے۔

مشق 3.4

مندرجہ ذیل اعداد کے لوگرتھم معلوم کیجیے۔

1. 9	2. 4.5	3. 78	4. 5.68	5. 11.89
6. 6879	7. 8.007	8. 6008	9. 0.6892	10. 0.0345
11. 0.002348	12. 0.06066	13. 70000	14. 0.857	15. 253.7

3.7 ضد لوگرتھم (Antilogarithms)

اگر $\log x = y$ تو x کو y کا ضد لوگرتھم کہتے ہیں۔ اِسے اس طرح لکھتے ہیں: $x = \text{antilog } y$

اگر کسی عدد x کا عام لوگرتھم y ہو یعنی اگر $\log x = y$ تو ہم عدد x کو ضد لوگرتھم کی جدول استعمال کرتے ہوئے مندرجہ ذیل دو اُصولوں کی مدد سے معلوم کر سکتے ہیں۔

اصول 1. اگر خاصہ مثبت n ہو تو ضد لوگرتھم میں صحیح عددی حصے میں ہندسوں کی تعداد $n + 1$ ہوتی ہے۔

اصول 2. اگر خاصہ منفی n ہو تو ضد لوگرتھم میں نقطہ اعشاریہ کے فوراً بعد صفروں کی تعداد $n - 1$ ہوتی ہے۔

ضد لوگرتھم معلوم کرنے کے طریقہ کار کی وضاحت مندرجہ ذیل مثالوں سے کی جاتی ہے۔

مثال 1. اگر $\log x = 2.3835$ تو x کی قیمت معلوم کیجیے۔

طریقہ:

1. مینٹیسہ یعنی 0.3835 کو دیکھیے۔ اس میں ہندسوں کی تعداد چار ہے۔
2. ضد لوگرتھم کی جدول میں بائیں سے پہلے کالم میں عدد .38 کو دیکھیے جسے نشان (→) سے ظاہر کیا گیا ہے اور اوپر سے پہلی سطر میں عدد 3 کو دیکھیے جسے نشان (↓) سے ظاہر کیا گیا ہے۔
3. نشان (→) اور (↓) کے سنگم پر ہمیں عدد 2415 ملتا ہے۔
4. فرق والے کالموں میں 5 والے کالم اور سطر جسے نشان (→) سے ظاہر کیا گیا ہے۔ اُن دونوں کے سنگم پر عدد 3 ملتا ہے۔
5. عدد 3 کو عدد 2415 میں جمع کیا تو عدد 2418 حاصل ہوا۔
6. عدد 2418 میں بائیں سے تین ہندسوں کے بعد نقطہ اعشاریہ لگائیے کیونکہ خاصہ 2 ہے۔

پس $x = 241.8$ مطلوبہ عدد

ضد لوگرتھم کی جدول

فرق والے کالم

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9
.00	1000	1002	1005	1007	1009	1012	1014	1016	1019	1021	0	0	1	1	1	1	2	2	2
.01	1023	1026	1027	1030	1033	1035	1038	1040	1042	1045	0	0	1	1	1	1	2	2	2
.02	1047	1050	1052	1054	1057	1059	1062	1064	1067	1069	0	0	1	1	1	1	2	2	2
.03	1072	1074	1076	1079	1081	1084	1086	1089	1091	1094	0	0	1	1	1	1	2	2	2
.04	1096	1099	1102	1104	1107	1109	1112	1114	1117	1119	0	1	1	1	1	2	2	2	2
.05	1122	1125	1127	1130	1132	1135	1138	1140	1143	1146	0	1	1	1	1	2	2	2	2
.06	1148	1151	1153	1156	1159	1161	1164	1167	1169	1172	0	1	1	1	1	2	2	2	2
.07	1175	1178	1180	1183	1186	1189	1191	1194	1197	1199	0	1	1	1	1	2	2	2	2
.08	1202	1205	1208	1211	1213	1216	1219	1222	1225	1227	0	1	1	1	1	2	2	2	3
.09	1230	1233	1236	1239	1242	1245	1247	1250	1253	1256	0	1	1	1	1	2	2	2	3
.10	1259	1262	1265	1268	1271	1274	1276	1279	1282	1285	0	1	1	1	1	2	2	2	3
.11	1288	1291	1294	1297	1300	1303	1306	1309	1312	1315	0	1	1	1	2	2	2	2	3
.12	1318	1321	1324	1327	1330	1334	1337	1340	1343	1346	0	1	1	1	2	2	2	2	3
.13	1349	1352	1355	1358	1361	1365	1368	1371	1374	1377	0	1	1	1	2	2	2	3	3
.14	1380	1384	1387	1390	1393	1396	1400	1403	1406	1409	0	1	1	1	2	2	2	3	3
.15	1413	1416	1419	1422	1426	1429	1432	1435	1439	1442	0	1	1	1	2	2	2	3	3
.16	1445	1449	1452	1455	1459	1462	1466	1469	1472	1476	0	1	1	1	2	2	2	3	3
.17	1479	1483	1486	1489	1493	1496	1500	1503	1507	1510	0	1	1	1	2	2	2	3	3
.18	1514	1517	1521	1524	1528	1531	1535	1538	1542	1545	0	1	1	1	2	2	2	3	3
.19	1549	1552	1556	1560	1563	1567	1570	1574	1578	1581	0	1	1	1	2	2	3	3	3
.20	1585	1589	1592	1596	1600	1603	1607	1611	1614	1618	0	1	1	1	2	2	3	3	3
.21	1622	1626	1629	1633	1637	1641	1644	1648	1652	1656	0	1	1	2	2	2	3	3	3
.22	1660	1663	1667	1671	1675	1679	1683	1687	1690	1694	0	1	1	2	2	2	3	3	3
.23	1698	1702	1706	1710	1714	1718	1722	1726	1730	1734	0	1	1	2	2	2	3	3	4
.24	1738	1742	1746	1750	1754	1758	1762	1766	1770	1774	0	1	1	2	2	2	3	3	4
.25	1778	1782	1786	1791	1795	1799	1803	1807	1811	1816	0	1	1	2	2	2	3	3	4
.26	1820	1824	1828	1832	1837	1841	1845	1849	1854	1858	0	1	1	2	2	3	3	3	4
.27	1862	1866	1871	1875	1879	1884	1888	1892	1897	1901	0	1	1	2	2	3	3	3	4
.28	1905	1910	1914	1919	1923	1928	1932	1936	1941	1945	0	1	1	2	2	3	3	4	4
.29	1950	1954	1959	1963	1968	1972	1977	1982	1986	1991	0	1	1	2	2	3	3	4	4
.30	1995	2000	2004	2009	2014	2018	2023	2028	2032	2037	0	1	1	2	2	3	3	4	4
.31	2042	2046	2051	2056	2061	2065	2070	2075	2080	2084	0	1	1	2	2	3	3	4	4
.32	2089	2094	2099	2104	2109	2113	2118	2123	2128	2133	0	1	1	2	2	3	3	4	4
.33	2138	2143	2148	2153	2158	2163	2168	2173	2178	2183	0	1	1	2	2	3	3	4	4
.34	2188	2193	2198	2103	2208	2213	2218	2223	2228	2234	1	1	2	2	3	3	4	4	5
.35	2239	2244	2249	2254	2259	2265	2270	2275	2280	2286	1	1	2	2	3	3	4	4	5
.36	2291	2296	2301	2307	2312	2317	2323	2328	2333	2339	1	1	2	2	3	3	4	4	5
.37	2344	2350	2355	2360	2366	2371	2377	2382	2388	2393	1	1	2	2	3	3	4	4	5
.38	2399	2404	2410	2415	2421	2427	2432	2438	2443	2449	1	1	2	2	3	3	4	4	5
.39	2455	2460	2466	2472	2477	2483	2489	2495	2500	2506	1	1	2	2	3	3	4	5	5
.40	2512	2518	2523	2529	2535	2541	2547	2553	2559	2564	1	1	2	2	3	4	4	5	5
.41	2570	2576	2582	2588	2594	2600	2606	2612	2618	2624	1	1	2	2	3	4	4	5	5
.42	2630	2636	2642	2649	2655	2661	2667	2673	2679	2685	1	1	2	2	3	4	4	5	6
.43	2692	2698	2704	2710	2716	2723	2729	2735	2742	2748	1	1	2	3	3	4	4	5	6
.44	2754	2761	2767	2773	2780	2786	2793	2799	2805	2812	1	1	2	3	3	4	4	5	6
.45	2818	2825	2831	2838	2844	2851	2858	2864	2871	2877	1	1	2	3	3	4	5	5	6
.46	2884	2891	2897	2904	2911	2917	2924	2931	2938	2944	1	1	2	3	3	4	5	5	6
.47	2951	2958	2965	2972	2979	2985	2992	2999	3006	3013	1	1	2	3	3	4	5	5	6
.48	3020	3027	3034	3041	3048	3055	3062	3069	3076	3083	1	1	2	3	4	4	5	6	6
.49	3090	3097	3105	3112	3119	3126	3133	3141	3148	3155	1	1	2	3	4	4	5	6	6

مثال 2. اگر $\log x = 0.4376$ تو x کی قیمت معلوم کیجیے۔

حل: عدد 0.43 والی سطر اور عدد 7 والے کالم کے سنگم پر ہمیں عدد 2735 ملتا ہے۔ اسی سطر اور فرق والے کالموں میں 6 والے کالم کے سنگم پر ہمیں عدد 4 ملتا ہے۔ 4 کو 2735 میں جمع کرنے سے ہمیں عدد 2739 حاصل ہوتا ہے۔ چونکہ خاصہ 0 ہے۔

لہٰذا صحیح عددی حصے میں صرف ایک ہندسہ ہوگا۔

پس $x = \text{antilog } 0.4376 = 2.739$

مثال 3. اگر $\log x = \bar{5}.1243$ ہے تو x کی قیمت معلوم کیجیے۔

حل: مندرجہ بالا مثال کے اعتبار سے۔

$x = \text{antilog } \bar{5}.1243 = 0.00001331$

چونکہ خاصہ 5– ہے اس لیے نقطہ اعشاریہ کے فوراً بعد چاروں صفروں کا اضافہ کیا گیا ہے۔

مشق 3.5

x کی قیمت معلوم کیجیے اگر:

1. $\log x = 1.7505$
2. $\log x = 0.6609$
3. $\log x = 2.2132$
4. $\log x = 1.9009$
5. $\log x = 0.0009$
6. $\log x = 3.8505$
7. $\log x = \bar{1}.6132$
8. $\log x = \bar{2}.7777$
9. $\log x = \bar{3}.3465$
10. $\log x = \bar{4}.8455$
11. $\log x = \bar{6}.7835$
12. $\log x = \bar{9}.6875$
13. $\log x = 3.4800$
14. $\log x = \bar{7}.0038$

3.8 حسابی عمل میں لوگرتھم کا استعمال

حسابی عوامل میں لوگرتھم کے استعمال کی وضاحت مندرجہ ذیل مثالوں سے کی جاتی ہے۔

واضح رہے کہ منفی خاصہ والے اعداد کی جمع اور تفریق کرتے وقت خصوصی احتیاط برتنی چاہیے۔

مثال 1. لوگرتھم کا استعمال کرتے ہوئے $n = (8.573)\,(28.74)$ حل کیجیے۔

حل: چونکہ $n = (8.573)\,(28.74)$

$$\begin{aligned}\log n &= \log (8.573)\,(28.74)\\ &= \log 8.573 + \log 28.74\\ &= 0.9332 + 1.4585\\ &= 2.3917\end{aligned}$$

اب $n = \text{antilog } 2.3917$

پس $n = 246.4$

حل:دوسرا طریقہ:۔ سائنٹیفک کیلکیولیٹراورلوگرتھم کا استعمال۔

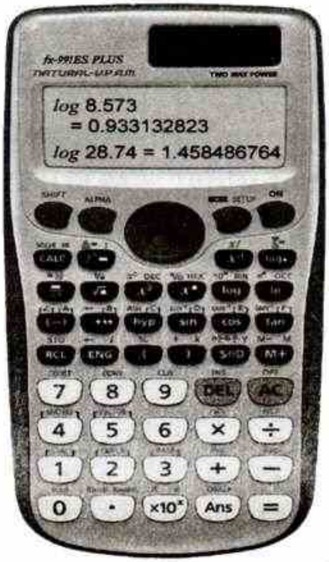
فرض کیجیے

$$x = 8.573 \times 28.74$$

دراصل ہمیں یہاں دیے گئے دو اعداد کی حاصل ضرب معلوم کرنی ہے۔لیکن لوگرتھم کے استعمال سے اور سائنٹیفک کیلکیولیٹر کی مدد سے۔

اب مساوات $x = 8.573 \times 28.74$ کے دونوں طرف لوگرتھم لیتے ہیں۔

$$\log x = \log (8.573 \times 28.74)$$



لوگرتھم قوانین کے مطابق

$$\boxed{\log m\, n = \log m + \log n}$$

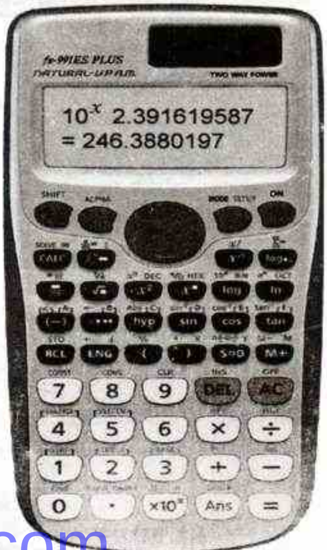
$$\log x = \log 8.573 + \log 28.74$$

اب سائنٹیفک کیلکیولیٹر کے ذریعے

$\log 8.573$ اور $\log 28.74$ کی قیمت معلوم کرتے ہیں۔

$$\log 8.573 = 0.933132823$$
$$\log 28.74 = 1.458486764$$
$$\log x = 0.933132823 + 1.458486764$$
$$\log x = 2.391619587$$

اب مساوات کے دونوں طرف کا ضدلوگرتھم (Anti log) معلوم کرتے ہیں



$$x = \text{Anti log } 2.391619587$$

ضدلوگرتھم 2.391619587 کی قیمت معلو کرنے کے لیے سائنٹیفک کیلکیولیٹر کا استعمال کرنے سے:

$$x = 246.3880197$$
$$\text{or } x = 246.3880$$
$$\text{or } x = 246.4$$

پس دیے گئے دواعداد کی حاصل ضرب 246. 4 ہے

مثال 2. لوگرتھم کا استعمال کرتے ہوئے $n = \frac{(6.735)\,(48.27)}{(16.18)^2}$ حل کیجیے۔

پہلا طریقہ:۔ لوگرتھم جدول کا استعمال کرنے سے۔

حل: دیئے گئے عدد n کا لوگرتھم لیتے ہوئے $\log n = \frac{(6.735)\,(48.27)}{(16.18)^2}$

$$= \log(6.735)(48.27) - \log(16.18)^2$$
$$= \log 6.735 + \log 48.27 - 2\log 16.18$$
$$= 0.8283 + 1.6836 - 2 \times 1.2090$$
$$= 2.5119 - 2.4180 = 0.0939$$

اب $n = \text{antilog } 0.0939$

پس $n = 1.242$

دوسرا طریقہ:۔ سائنٹیفک کیلکیولیٹر استعمال کرنے سے

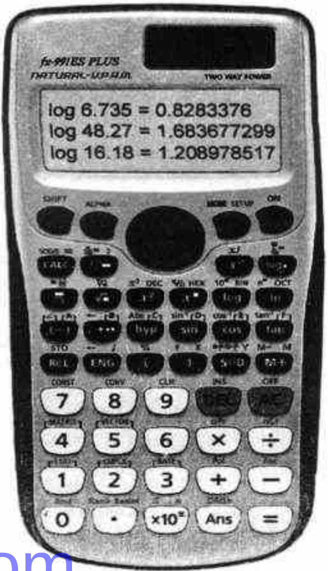
حل: فرض کیجیے۔

$$x = \frac{6.735 \times 48.27}{(16.18)^2}$$

اب مساوات کے دونوں اطراف کا لوگرتھم معلوم کرتے ہیں۔

یعنی $\log x = \log \frac{6.735 \times 48.27}{(16.18)^2}$

لوگرتھم قوانین کے مطابق



لوگرتھم قانون II: $\log \frac{m}{n} = \log M - \log n$

$$\log x = \log(6.735 \times 48.27) - \log(16.18)^2$$
$$\log x = \log 6.735 + \log 48.27 - 2\log 16.18$$

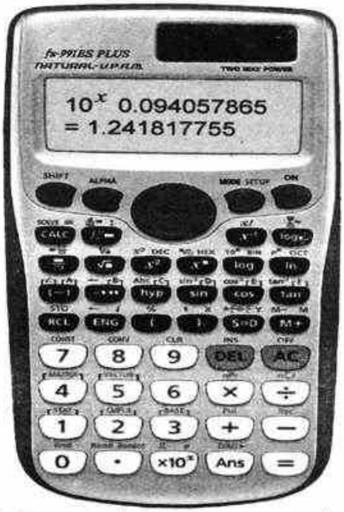
اب سائنٹیفک کیلکیولیٹر کے ذریعے $\log 6.735$، $\log 48.27$ اور $\log 16.18$ کی قیمت معلوم کرتے ہیں۔

لوگرتھم قانون I: $\log mn = \log m + \log n$
لوگرتھم قانون III: $\log m^n = n \log m$

$\log 6.735 = 0.828\,3376$
$\log 48.27 = 1.683677299$
$\log 16.18 = 1.208978517$

اس طرح

$$\log x = 0.8283376 + 1.683677299 - 2 \times 1.208978517$$
$$\log x = 2.512014899 - 2.417957034$$
$$\log x = 0.94057865$$



اب مساوات کے دونوں اطراف کا ضدلوگرتھم معلوم کرتے ہیں۔

ضدلوگرتھم 0.94057865 کی قیمت معلوم کرنے کے لیے سائنٹفک کیلکیولیٹر کا استعمال کرتے ہیں۔

اس طرح

$x = 1.24\,1817755$

or $x = 1.2418$

or $x = 1.242$ پس دیئے گئے اظہار کی قیمت 1.242 حاصل ہوئی۔

مثال 3. 3^5 میں ہندسوں کی تعداد معلوم کیجیے۔

حل: فرض $n = 3^5$

تو $\log n = \log 3^5$

$= 5 \log 3 = 5\,(0.4771)$

$= 2.3855$

پس $n = \text{antilog } 2.3855$

فصل 3.7 کے اصول I کے مطابق عدد میں ہندسوں کی تعداد، خاصہ اور 1 کے مجموعے کے برابر ہوتی ہے اس لیے 3^5 میں ہندسوں کی تعداد $2 + 1 = 3$ ہے۔

مشق 3.6

لوگرتھم کا استعمال کرتے ہوئے مندرجہ ذیل کی قیمت معلوم کیجیے۔

1. $(86)(0.45)$
2. $\dfrac{85.7 \times 2.47}{8.89}$
3. $\dfrac{0.87}{(28.9)(0.785)}$
4. $\dfrac{57.26}{\sqrt[3]{0.382}}$
5. $\dfrac{\sqrt{673.3}}{\sqrt[3]{58.4}}$
6. $(17.92)^{-\frac{1}{9}}$
7. $\dfrac{\sqrt{431.5} \times (1.2)^2}{\sqrt[3]{36.98}}$
8. $\dfrac{(780.6)^{\frac{1}{4}} \times \sqrt{3.000}}{4.000}$
9. $\dfrac{(86.2)^2 \times (37.37)}{591}$
10. $\dfrac{(23.60)^{\frac{1}{2}} \times (8.719)^3}{\sqrt{693}}$

مندرجہ ذیل میں ہندسوں کی تعداد معلوم کیجیے۔

11. 2^{12}
12. 3^{19}
13. 4^{75}
14. 9^{48}
15. 7^{56}

متفرق مشق III

.1 سائنسی ترقیم میں لکھیے:

(i) 4520 (ii) 26.517 (iii) 0.0023 (iv) 0.00001082 (v) 0.0130216

.2 عام صورت میں لکھیے:

(i) 7.21×10^3 (ii) 7.21×10^{-9} (iii) 5.012×10^6

.3 لوگرتھمی شکل میں لکھیے:

(i) $3^3 = 27$ (ii) $2^{-3} = \frac{1}{8}$ (iii) $7^{-2} = \frac{1}{49}$ (iv) $10^{-3} = 0.001$

.4 قیمت معلوم کیجیے:

(i) $\log_2 8$ (ii) $\log_3 81$ (iii) $\log_{125} 25$ (iv) $\log_9 729$ (v) $\log_4 64$

.5 a کی قیمت معلوم کیجیے:

(i) $\log_a 16 = 4$ (ii) $\log_a \frac{1}{27} = -\frac{3}{2}$ (iii) $\log_a 64 = 4$ (iv) $\log_a 125 = 5$

.6 مندرجہ ذیل کا لوگرتھم معلوم کیجیے:

(i) 165 (ii) 0.00347 (iii) 333.1 (iv) 6568 (v) 23.59

.7 مندرجہ ذیل کا ضد لوگرتھم معلوم کیجیے:

(i) 2.316 (ii) 0.0214 (iii) $\bar{1}.3161$ (iv) $\bar{2}.67$ (v) 1.6453

.8 قیمت معلوم کیجیے:

(i) $\log 24$ (ii) $\log 0.063$ (iii) $2 \log (31.6)$ (iv) $\log (312)(450)$ (v) $\frac{\log 729}{\log 9}$

.9 مندرجہ ذیل بیانات کوغور سے پڑھیے جو صحیح ہیں اُن کے سامنے "ص" لکھیے اور جو غلط ہیں ان کے سامنے "غ" لکھیے۔

(i) اگر ایک عدد سائنسی ترقیم میں لکھا ہوا ہو تو اسے معیاری شکل میں بھی لکھا ہوا کہتے ہیں۔

(ii) اساس کا لوگرتھم خود پر صفر ہوتا ہے۔

(iii) 1 کا لوگرتھم کسی اساس پر صفر ہوتا ہے۔

(iv) لوگرتھم کا مینٹیسہ (*Mantissa*) مثبت یا منفی ہوتا ہے۔

(v) خاصہ عددی لحاظ سے نقطہ اعشاریہ کے فوراً بعد صفروں کی تعداد سے ایک کم ہوتا ہے۔

.10 مندرجہ ذیل میں صحیح جواب منتخب کر کے خالی جگہ میں لکھیے۔

(i) 0.000573 کی سائنسی ترقیم ________ :

(*a*) 0.0573×10^{-2} (*b*) 0.573×10^{-4} (*c*) 5.73×10^{-4} (*d*) 57.3×10^{-5}

(ii) log 5.723 کا خاصہ ________ :

(*a*) 1 (*b*) −1 (*c*) 0 (*d*) 2

(iii) قدرتی لوگرتھم کی اساس ________ :

(*a*) π (*b*) e (*c*) 10 (*d*) 0

(iv) اگر $\log_2 x = 3$ تو $x =$ ________

(*a*) 6 (*b*) 8 (*c*) 10 (*d*) 5

(v) $\frac{\log_5 3}{\log_5 2} =$ ________

(*a*) $\log_5 2$ (*b*) $\log_5 3$ (*c*) $\log_3 2$ (*d*) $\log_2 3$

یونٹ 4

الجبری اظہاریے

4.1 متغیر اور مستقل

متغیر ایک علامت ہے جو کسی غیر خالی سیٹ کے ہر رُکن کو ظاہر کرتی ہے۔ دیئے ہوئے سیٹ کو متغیر کا حلقہ اثر (Domain) کہتے ہیں۔ اسکے ارکان کو انگریزی حرفِ تہجی کے چھوٹے حرف x، y، z وغیرہ سے ظاہر کیا جاتا ہے۔ مستقل ایک علامت ہے جو صرف ایک شے کو متعین کرتی ہے۔

مثال: اظہاریے $x + 5$ کی قیمت معلوم کیجیے اگر (i) $x = 4$ (ii) $x = 7$

حل: (i) $x + 5$ میں x کی جگہ اس کی قیمت 4 رکھنے پر

$$x + 5 = 4 + 5 = 9$$

(ii) اگر اسی اظہاریے میں x کی قیمت 7 ہو تو

$$x + 5 = 7 + 5 = 12$$

یوں اظہاریے $x + 5$ کی قیمت 9 ہے اگر $x = 4$ ہو اور 12 ہے اگر $x = 7$ ہو یعنی x کی مختلف قیمتیں رکھنے سے اظہاریے کی قیمت تبدیل ہوتی رہتی ہے۔ اس لیے اس اظہاریے میں x کو متغیر (Variable) کہا جاتا ہے اور 12,9,5 جو تبدیل نہیں ہوتے مستقل (Constant) کہلاتے ہیں۔

4.2 عددی سر

ایک مستقل عدد جو کسی متغیر سے ضرب دیا گیا ہو متغیر کا عددی سر (Coefficient) کہلاتا ہے پس رقم $5x^2$ میں x^2 کا عددی سر 5 ہے۔ $3x^2 - 4x$ میں x^2 کا عددی سر 3 اور x کا عددی سر -4 ہے۔

4.3 الجبری اظہاریے

مستقلات اور متغیرات کا ایسا مجموعہ جو بنیادی عوامل $(+, -, \times, \div)$ ، جذر اور قوت سے جوڑا گیا ہو الجبری اظہاریہ (Algebric Expression) کہلاتا ہے۔

پس $3a + 5b$ ، $4x^2 - \frac{2}{x} + 7$ ، $4a \times 3b$ ، اور $4x^2 + xy - y^2 \div 4$ الجبری اظہاریے ہیں۔

کسی الجبری اظہاریے کے مختلف حصے جو + یا – کی علامتوں سے مربوط کیے گئے ہوں اظہاریے کی رقوم (Terms) کہلاتی ہیں۔

الجبری اظہاریے $2x + 3y + 4z$ میں تین رقوم یعنی $2x, 3y$ اور $4z$ ہیں۔

4.4 الجبری اظہاریے کی اقسام

الجبری اظہاریے تین اقسام کے ہوتے ہیں۔

(i) کثیر رقمی اظہاریے یا کثیر رقمی (ii) ناطق اظہاریے (iii) غیر ناطق اظہاریے

(i) کثیر رقمی اظہاریہ (Polynomial)

ایک متغیر x میں کثیر رقمی اظہاریے کو عموماً $P(x)$ سے ظاہر کرتے ہیں اور یہ ذیل کی قسم کا اظہاریہ ہوتا ہے۔

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots + a_{n-1} x + a_n, \ \ldots \quad (1)$$

جبکہ n ایک مثبت صحیح عدد یا صفر ہو $a_n \neq 0$ اور عددی سر $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ حقیقی اعداد ہیں۔

اظہاریہ (1) کو ایک متغیر x میں n درجہ کی کثیر رقمی کہتے ہیں۔

(الف) جب $n = 0$ اور $a_0 \neq 0$ ، ہو تو $P(x) = a_0 n^0 = a_0$ (کیونکہ $x^0 = 1$)
معلوم ہوا کہ a_0 جو کہ ایک مستقل ہے۔ صفر درجہ کی کثیر رقمی ہے۔

(ب) اگر کسی کثیر رقمی میں تمام عددی سر صفر ہوں یعنی

$$P(x) = 0.x^n + 0.x^{n-1} + 0.x^{n-2} + \ldots + 0.x,$$

تو $P(x) = 0$ یعنی جو کہ مستقل کثیر رقمی ہے جس کے ساتھ کوئی خاص درجہ مربوط نہیں کیا جاتا۔

اگر کثیر رقمی (1) میں $n = 1,2,3$ درج کریں تو اس طرح ملنے والی کثیر رقمیاں یک درجی، دو درجی اور سہ درجی کثیر رقمیاں کہلاتی ہیں، مثلاً $7x - 4$, $3x^2 + 2x + 5$ اور $5x^3 - x^2 + 2x - 1$ بالترتیب ایک متغیر میں 1, 2 اور 3 درجے کی کثیر رقمیاں ہیں۔

نوٹ: کسی کثیر رقمی کا درجہ اُس میں موجود ایسی غیر صفر رقم کا درجہ ہوتا ہے جس کا درجہ کثیر رقمی میں سب سے زیادہ ہو۔

دو متغیرات پر مشتمل کثیر رقمیاں

دو متغیرات x اور y میں کثیر رقمی کی ہر رقم اس شکل کی ہوتی ہے:

$$ax^m y^n \quad \ldots . (2)$$

جبکہ n, m غیر منفی صحیح اعداد ہیں اور $a \neq 0$

مثلاً $4x^2 - 3y^3, ax^2y , ax^2y^3 + xy^2 - y - c$ دو متغیرات x اور y میں کثیر رقمیاں ہیں

واضح رہے کہ $x + \frac{1}{y}$ کثیر رقمی نہیں ہے کیونکہ اسے (2) کی شکل میں نہیں لکھا جاسکتا۔

(ii) ناطق اظہاریہ (Rational Expression)

ایسا اظہاریہ جو $\frac{p(x)}{q(x)}$ کی شکل میں لکھا ہو (جبکہ $p(x)$ اور $q(x)$ کثیر رقمیاں ہوں اور $q(x) \neq 0$) ناطق اظہاریہ کہلاتا ہے۔

مثلاً $\frac{x^2+1}{x}$ جبکہ $x \neq 0$ متغیر x میں ناطق اظہاریہ ہے۔ چونکہ ہر کثیر رقمی کو $\frac{p(x)}{1}$ کی شکل میں لکھا جاسکتا ہے لہٰذا ہر کثیر رقمی ناطق اظہاریہ ہے مگر اس کا اُلٹ عموعی طور پر درست نہیں ہے۔

(iii) غیر ناطق اظہاریہ (Irrational Expression)

ایسا الجبری اظہاریہ جو $\frac{p(x)}{q(x)}$ کی شکل میں نہ لکھا جاسکے جبکہ $q(x) \neq 0$ اور $p(x)$ اور $q(x)$ کثیر رقمیاں ہوں۔ غیر ناطق اظہاریہ کہلاتا ہے مثلاً $\sqrt{x}$ ، $\sqrt[3]{yz^2}$ ، $\frac{1}{\sqrt{x+1}}$ غیر ناطق اظہاریے ہیں۔

4.5 کثیر رقمیوں کی جماعت بندی

کثیر رقمی اظہاریوں کی جماعت بندی بلحاظ رقوم کی جاسکتی ہے۔

(i) یک رقمی: ایسی کثیر رقمی جس میں ایک رقم ہو یک رقمی (Monomial) کہلاتی ہے۔

مثلاً $5x^3y^4$, $3x^2yz$ یک رقمیاں ہیں۔

(ii) دورقمی: ایسی کثیررقمی جس کی دو رقوم ہوں، دو رقمی (Binomial) کہلاتی ہے۔ مثلاً $3x - 4y$, $7x^3 - 7xy^2z^3$ دو رقمیاں ہیں۔

(iii) سہ رقمی: ایسی کثیررقمی جس میں تین رقوم ہوں، سہ رقمی (Trinomail) کہلاتی ہے۔

$2x^2 + 5x - 2$, $3x - 7y + 3z$, $x^3 - 3xy - 4x^3z^5$ سہ رقمیاں ہیں۔

نوٹ: $10x^2y^3 + 20xy + 50$ ایک 5 درجی کثیررقمی ہے کیونکہ $10x^2y^3$ سب سے زیادہ درجے والی رقم ہے۔

مشق 4.1

1. مندرجہ ذیل میں کثیررقمی، ناطق اور غیرناطق اظہاریے الگ کیجیے۔

(i) $3x - \frac{1}{3}$ (ii) 5 (iii) $\frac{4}{x}$ (iv) 0 (v) $x^2 + y - 3$

(vi) $\frac{1}{y} - y$ (vii) $\frac{1}{x^2+2}$ (viii) $\frac{\sqrt{1}}{4}$ (ix) $\sqrt[3]{(x-y)^2}$

2. مندرجہ ذیل میں کثیررقمی اور غیرکثیررقمی علیحدہ کیجیے۔ کثیررقمی ہونے کی صورت میں متغیرات کی تعداد لکھیے۔

(i) $\frac{3-x}{x}$ (ii) $5xy^3$ (iii) $3xt^3 - 4xyt$ (iv) $16 - \frac{1}{x^2}$ (v) $x^4 - x^2 + 1$

(vi) $5^3 + \frac{4}{x}$ (vii) $x - 1$ (viii) $\frac{3}{4}xyz$ (ix) $x^2 + 2x + 1$

3. مندرجہ ذیل کثیررقمیوں میں رقوم کے لحاظ سے ان کی قسمیں معلوم کیجیے۔

(i) $x - 3y$ (ii) $--\frac{1}{4} + 2x + 5$ (iii) $3x - \frac{1}{4}y - 5$ (iv) $x^2 + 7x + 3$

(v) $4x^2 - y$ (vi) x (vii) $\frac{4}{13}$ (viii) $(a-b)^2 - b^2$

4 مندرجہ ذیل کثیررقمیوں کے درجے معلوم کیجیے۔

(i) $x + y^2$ (ii) $x^4y + y^2 + y^3$ (iii) 5^3 (iv) $x^2y^2 + y^2$ (v) $x^2y^2z^2$

(vi) $x + y + xy^2$ (vii) $x^6 + x^2y^5$ (viii) π (ix) $\sqrt{\sqrt[3]{(a^2-b)^3}}$

4.6 الجبری اظہاریوں کی ترتیب

جب کسی ایک متغیر کے الجبری اظہاریے میں متغیر کے قوت نما، بائیں سے دائیں بتدریج کم ہوتے جائیں تو ایسا اظہاریہ ترتیب نزولی (Descending Order) میں کہلاتا ہے۔ مثلاً $x^4 - 5x^3 - x^2 + 1$ ترتیب نزولی میں ہے۔

جب کسی ایک متغیر کے الجبری اظہاریے میں متغیر کے قوت نما، بائیں سے دائیں بتدریج زیادہ ہوتے جاتے ہیں تو ایسا اظہاریہ ترتیب صعودی (Ascending Order) میں کہلاتا ہے۔ مثلاً $1 - x^2 - 5x^3 + x^4$ ترتیب صعودی میں ہے۔

نوٹ: الجبری اظہاریوں کی ضرورت کے مطابق ترتیب تبدیل کی جاسکتی ہے بشرطیکہ رقموں کے قوت نما اور علامت تبدیل نہ ہوں۔

مشق 4.2

.1 a کے لحاظ سے مندرجہ ذیل الجبری اظہاریوں کو ترتیب صعودی لکھیے۔

(i) $2a^3y + 4ay^2 - 5a^2y^3$ (ii) $3x^2 - ay^2 - 2a^4 + 4a^2z^2$

(iii) $x^2 + 4ay^2 - 5a^4 + 2a^2xy - 2a^3x^3$ (iv) $2 - 3x^3a + 4x^2a^3 - \frac{1}{4}a^5 + a^4z^6$

(v) $-\frac{1}{2}a - \frac{3}{7}a^4 + \frac{1}{3}xyz + \frac{2}{5}a^2$

.2 دیئے گئے متغیرات کے لحاظ سے مندرجہ ذیل الجبری اظہایوں کو ترتیب نزولی میں لکھیے۔

(i) $x^2 + x^3 - 2x - 1$ (ii) $y - 4y^2 - 7 + y^3 - 5y^5$

(iii) $\frac{3}{4} - t - \frac{2}{3}t^3 + t^6$ (iv) $z^5 + 2z - \frac{1}{3} + z^3$ (v) $4y^3 - 2y + 5y^4 + 7$

(vi) $y^4 + \frac{4}{y^2} + \frac{9}{y^4} + 4y - \frac{12}{y^3} + 6,$ $(y \neq 0)$

(vii) $x^2 - 10 - \frac{9}{x^2} + 4x + \frac{12}{x},$ $(x \neq 0)$

(viii) $4y^4 - 96 - 32y^2 - \frac{64}{y^4} - \frac{128}{y^2},$ $(y \neq 0)$

(ix) $\frac{1}{a^4} + \frac{4}{a^2} - 6 + 4a^2 + a^4,$ $(a \neq 0)$

(x) $9 - 4x^2 - \frac{8}{x^2} - \frac{4}{x^4} + 4x^4$ $(x \neq 0)$

4.7 الجبری اظہاریوں کی قیمت

اگر ہم کسی الجبری اظہاریے میں کسی متغیر کی جگہ کچھ متعین قیمتیں رکھ دیں تو مختصر کرنے کے بعد ہمیں ایک حقیقی عدد حاصل ہوگا جسے اس الجبری اظہاریہ کی قیمت کہتے ہیں۔

مثال.1 اگر $x = 2$ تو $p(x) = 3x + 2$ کی قیمت معلوم کیجیے۔

حل: $p(2) = 3(2) + 2 = 6 + 2 = 8$

مثال.2 اگر $a = 2$, $b = -2$, اور $c = -1$ تو $a^2 - ab + 2c^2$ کی قیمت معلوم کیجیے۔

حل: دی ہوئی کثیر رقمی میں c,b,a کی قیمت رکھنے سے

$$a^2 - ab + 2c^2 = (2)^2 - (2)(-2) + 2(-1)^2$$
$$= 4 + 4 + 2 = 10$$

مشق 4.3

.1 مندرجہ ذیل الجبری اظہاریوں میں ہر ایک کی قیمت معلوم کیجیے۔

(i) $2x^2 - 3yz$ جبکہ $x = 2,\ y = -1,\ z = 3$

(ii) $2x^4 - 3x^3 + 4x^2 - 2x + 3$ جبکہ $x = 3$

(iii) $4a^2 - 3ab + bc$ جبکہ $a = 0, b = 4, c = 1$

(iv) $\dfrac{5xy + 3z}{2a^3 - c^2}$ جبکہ $x = 2,\ y = -1,\ z = 3,\ a = 4,\ c = \dfrac{1}{3}$

(v) $\dfrac{3x^2y}{z} - \dfrac{bc}{x + 1}$ جبکہ $x = 2,\ y = -1,\ z = 3,\ b = 4,\ c = \dfrac{1}{3}$

(vi) $\dfrac{4x^2y(z - 1)}{a + b - 3c}$ جبکہ $x = 2,\ y = -1,\ z = 3,\ a = 0,\ b = 4,\ c = \dfrac{1}{3}$

.2 اگر $p(x) = 2x^4 + 3x^3 - x - 5$ ہو تو $p(-2)$ معلوم کیجیے۔

.3 اگر $q = \dfrac{pf}{p - 6}$ تو q کی قیمت معلوم کیجیے جبکہ $p = 10$ ، $f = 30$

.4 اگر $s = \dfrac{n}{2}\{2a + (n - 1)d\}$ تو s کی قیمت معلوم کیجیے جبکہ $a = 2, n = 5$ اور $d = 3$

.5 اگر $s = v_0t + \dfrac{1}{2}at^2$ تو s کی قیمت معلوم کیجیے جبکہ $v_0 = 0$ ، $t = 4$ اور $a = 5$

4.8 الجبری اظہاریوں پر بنیادی عوامل

4.8.1 الجبری اظہاریوں کی جمع

الجبری اظہایوں کو جمع کرتے وقت ایک جیسی رقوم (Like Terms) کو خاصیت مبادلہ یا خاصیت تلازم یا ضرب کی خاصیت تقسیمی کا استعمال کرتے ہوئے یکجا کیا جاتا ہے اس عمل کو عمودی یا اُفقی کسی بھی طریقے سے کیا جاسکتا ہے۔

مثال: $7x + 3y^3 - 4xy$, $3x - 2y^3 + 7xy$ اور $2xy - 5x + 6y^3$ کو جمع کیجیے۔

حل:

$$\begin{array}{r} 7x + 3y^3 - 4xy \\ 3x - 2y^3 + 7xy \\ -5x + 6y^3 + 2xy \\ \hline 5x + 7y^3 + 5xy \\ \hline \end{array}$$

مجموعہ: $5x + 7y^3 + 5xy$

4.8.2 الجبری اظہاریوں کی تفریق

الجبری اظہاریوں میں تفریق اس طرح کرتے ہیں کہ جس اظہاریے کو تفریق کرنا ہو اس کی رقموں کی علامت بدل کر دوسرے اظہاریے میں جمع کر دیتے ہیں۔

مثال 1. $2y^2 - 3yz + 5z^2$ کو $10y^2 - 2yz - 3z^2$ میں سے تفریق کیجیے۔

حل: اُفقی طریقہ

$$(10y^2 - 2yz - 3z^2) - (2y^2 - 3yz + 5z^2)$$

$$= 10y^2 - 2yz - 3z^2 - 2y^2 + 3yz - 5z^2$$

$$= 10y^2 - 2y^2 - 2yz + 3yz - 3z^2 - 5z^2$$

$$= (10 - 2)y^2 + (-2 + 3)yz + (-3 - 5)z^2$$

$$= 8y^2 + yz - 8z^2$$

عمودی طریقہ

$$\begin{array}{r} 10y^2 - 2yz - 3z^2 \\ \underset{-}{+}2y^2 \underset{+}{-} 3yz \underset{-}{+} 5z^2 \\ \hline 8y^2 + yz - 8z^2 \\ \hline \end{array}$$

مثال 2. اگر $A = x^2 + y^2 - z^2$, $B = 3x^2 - 2y^2 + 5z^2$ اور $C = 3y^2 - 5x^2 - z^2$

تو $2A - 3B + 4C$ کی قیمت معلوم کیجیے۔

حل: B, A اور C کی قیمتیں $2A - 3B + 4C$ میں درج کرنے سے

$$2A - 3B + 4C = 2(x^2 + y^2 - z^2) - 3(3x^2 - 2y^2 + 5z^2) + 4(3y^2 - 5x^2 - z^2)$$

$$= 2x^2 + 2y^2 - 2z^2 - 9x^2 + 6y^2 - 15z^2 + 12y^2 - 20x^2 - 4z^2$$

$$= 2x^2 - 9x^2 - 20x^2 + 2y^2 + 6y^2 + 12y^2 - 2z^2 - 15z^2 - 4z^2$$

$$= -27x^2 + 20y^2 - 21z^2$$

4.8.3 الجبری اظہاریوں کی ضرب

ضربی عمل میں قوانین قوت نما، اصول علامات اور مبادلی، تلازمی، ضرب کی جمع پر تقسیمی خصوصیات استعمال ہوتی ہیں۔ اس کی وضاحت مندرجہ ذیل مثالوں سے کی جاتی ہے۔

مثال 1. $2a^4b, -3a^2b^3c$ اور $-4ab^4c^2$ کو ضرب دیجیے۔

حل: ایک جیسے متغیر کو یکجا کرتے ہوئے اور ضرب کی خاصیت تلازم اور قوانین قوت نما کا استعمال کرتے ہوئے:

$$
\begin{aligned}
(-3a^2b^3c)(2a^4b)(-4ab^4c^2) &= (-3\times 2\times -4)(a^2\times a^4\times a)(b^3\times b\times b^4)(c\times c^2)\\
&= 24a^{2+4+1}\,b^{3+1+4}\,c^{1+2}\\
&= 24a^7\,b^8\,c^3
\end{aligned}
$$

مثال 2: $-3x-9+x^2$ کو $3+x$ سے ضرب دیجیے۔

حل: **افقی طریقہ** x کے قوت نماؤں کو ترتیب نزولی میں ترتیب دینے سے

$$
\begin{aligned}
&(x^2-3x-9)(x+3)\\
&= x^2(x+3)-3x(x+3)-9(x+3)\\
&= x^3+3x^2-3x^2-9x-9x-27\\
&= x^3-18x-27
\end{aligned}
$$

عمودی طریقہ

$$
\begin{array}{r}
x^2-3x-9\\
x+3\\
\hline
x^3-3x^2-9x\\
+3x^2-9x-27\\
\hline
x^3 \qquad -18x-27
\end{array}
$$

4.8.4 الجبری اظہاریوں کی تقسیم

اِس عمل کی وضاحت مندرجہ ذیل مثالوں سے کی جاتی ہے۔

مثال 1. $x^2+2x^4-3x^3+x-2$ کو x^2-3x+2 سے تقسیم کیجیے۔

حل: پہلے x کے لحاظ سے کثیر رقمیوں کو ترتیب نزولی میں لکھیے اور عملِ تقسیم کو ذیل میں ملاحظہ کیجیے۔

$$
\begin{array}{r|l}
 & 2x^2+3x+6\\
\hline
x^2-3x+2 & 2x^4-3x^3+x^2+x-2\\
 & \underline{\underset{-}{}2x^4\underset{+}{-}6x^3\underset{-}{+}4x^2}\\
 & \qquad 3x^3-3x^2+x-2\\
 & \qquad \underline{\underset{-}{}3x^3\underset{+}{-}9x^2\underset{-}{+}6x}\\
 & \qquad\qquad 6x^2-5x-2\\
 & \qquad\qquad \underline{\underset{-}{}6x^2\underset{+}{-}18x\underset{-}{+}12}\\
 & \qquad\qquad\qquad 13x-14
\end{array}
$$

پس حاصل تقسیم یا خارج قیمت $= 2x^2+3x+6$

اور باقی $= 13x-14$

مثال 2. $6x^3 + 13x^2 + 4x + 20$ میں کیا جمع کیا جائے کہ $x^2 + 2$ سے پورا پورا تقسیم ہو جائے؟

حل:

$$
\begin{array}{r|l}
 & 6x + 13 \\
\hline
x^2 + 2 & 6x^3 + 13x^2 + 4x + 20 \\
 & \underline{\underset{-}{6x^3} \qquad \underset{-}{+12x}} \\
 & 13x^2 - 8x + 20 \\
 & \underline{\underset{-}{13x^2} \qquad \underset{-}{+26}} \\
 & -8x - 6
\end{array}
$$

چونکہ باقی صفر نہیں ہے لہٰذا مکمل تقسیم کے لیے اگر $8x + 6$ کو دیے ہوئے اظہاریے میں جمع کر دیا جائے تو صفر باقی بچے گا۔

$$
\begin{aligned}
\text{باقی} &= (-8x - 6) + (8x + 6) \\
&= -8x + 8x - 6 + 6 \\
&= 0
\end{aligned}
$$

مشق 4.4

.1 جمع کیجیے:

(i) $a^2 - ab + 2bc + 3c^2$, $2ab + b^2 - 3bc - 4c^2$ اور $ab - 4bc + c^2 - a^2$

(ii) $4x^2 + 3y^2 - 6x + 4y - 2$, $2x - y^2 + 3x^2 - 4y + 3$ اور $-6x^2 - 2y^2 - 1$

(iii) $5a^2 - 7ab + 3b^2 + 8$, $-4b^2 - 3ab - 2a^2 - 3$ اور $-a^2 - b^2 + 6ab - 7$

.2 تفریق کیجیے:

(i) $4x^5 + 3x^3 + x^4 - 6x^2$ کو $6x^2 - 3x^5 + 2x^4 + 3x^3 + 6$ میں سے

(ii) $a^4 - 7a^3b + 6a^2b^2 + 5ab^3 + 6b^4$ کو $5ab^3 + 6b^4 - a^4 + 7a^3b - 8a^2b^2 + 7$ میں سے

(iii) $7x - 8y + 4z - 5t$ کو $x^2 + y^2 + z^2 - 7x + 8y - 5z + 5t$ میں سے

.3 $P + Q + R$ کی قیمت معلوم کیجیے جبکہ $P = a^4 - 3a^3b + 4a^2b^2 - 5b^3$,
$Q = 3a^4 - 4ab^3 + 7a^3b - 2a^2b^2$ اور $R = 2a^2b^2 - 2a^3b - 6a^4 + 3ab^3$

.4 $3X - 4Y - 2Z$ کی قیمت معلوم کیجیے جبکہ $X = 3x^3 - 7x^2 - 9x + 7$, $Y = 12x^3 + 3x^2 - 13x + 1$ اور
$Z = 6x^3 - 5x^2 - 6x + 4$

.5 دو الجبری اظہاریوں کا مجموعہ $3x^3 + 3x + 7y + 4xy$ ہے اگر ایک الجبری اظہاریہ $4xy - 3x^3$ ہو تو دوسرا معلوم کیجیے۔

.6 دو الجبری اظہاریوں کا مجموعہ $4x^4 - 3x^3 + 2x^2 - a$ ہے اگر ان میں سے ایک $2x^4 + x^3 - x^2 + 2a$ ہو تو دوسرا معلوم کیجیے۔

.7 حاصل معلوم کیجیے۔

(i) $(\sqrt{a} + \sqrt{b})(a - \sqrt{ab} + b)$ **(ii)** $(a^2 - ab + b^2)(a^2 + ab + b^2)$

(iii) $(x - y)(x^4 + x^3y + x^2y^2 + xy^3 + y^4)$

.8 عملِ تقسیم کیجیے۔

(i) $(5x^2 - 16xy + 3y^2) \div (x - 3y)$ **(ii)** $(x^3 - 19x - 30) \div (x^2 - 3x - 10)$

(iii) $(a^4 - 3a^2b^2 + b^4) \div (a^2 - ab - b^2)$

.9 $2x^4 + 3x^3 - x^2 - 1$ میں سے کیا تفریق کیا جائے کہ یہ $(x - 2)$ سے پورا پورا تقسیم ہو سکے؟

.10 اگر دو اظہاریوں کا حاصل ضرب $12x^4 - 34x^3 + 37x^2 - 17x + 5$ ہو اور ایک اظہاریہ $3x^2 - 7x + 5$ ہو تو دوسرا معلوم کیجیے؟

.11 a کی کسی قیمت کے لئے اظہاریہ $2a^4 + 3a^3 - 4a^2 + 14a + 11$ سے $a^2 - 2a + 3$ پورا پورا تقسیم ہو جائے گا؟

.12 $x^3 + x^2 - 14x - k$ میں k کی کیا قیمت ہو کہ یہ $x + 2$ سے پورا پورا تقسیم ہو جائے؟

4.9 مسئلہ باقی (Remainder Theorem)

مسئلہ باقی ذیل میں بیان کیا جاتا ہے:

اگر کثیر رقمی $p(x)$ جس کا درجہ n جبکہ $(n \geq 1)$ ہو، کو یک درجی کثیر رقمی $x - a$ سے تقسیم کیا جاتا ہے تو باقی $r = p(a)$ حاصل ہوتا ہے۔

ثبوت: تقسیم کی تعریف کے لحاظ سے اگر $p(x)$ کو کسی کثیر رقمی $d(x)$ سے تقسیم کرنے پر خارج قسمت $q(x)$ اور باقی $r(x)$ حاصل ہوتا ہے تو

(a) $p(x) = d(x)\, q(x) + r(x)$ اور

(b) $r(x)$ کا درجہ $d(x)$ کے درجہ سے کم ہوتا ہے۔

چونکہ مقسوم علیہ $(x - a)$ ہے جس کا درجہ 1 ہے اس لیے باقی کا درجہ یقیناً صفر ہوگا یعنی کوئی مستقل ہوگا اس لیے

$$p(x) = (x-a)\, q(x) + r \quad (\text{جبکہ } r \text{ مستقل ہے}) \qquad \ldots \quad (1)$$

چونکہ (1) ایک تطبیق (*Identity*) ہے اس لیے x کی ہر قیمت کے لیے صحیح ہے۔ اسطرح بالخصوص $x = a$ کے لیے بھی صحیح ہے۔

چنانچہ (1) میں $x = a$ رکھنے پر $p(a) = (a-a)\, q(x) + r$

$$\Rightarrow p(a) = 0.q\,(x) + r = r,$$

اور یہی ثابت کرنا تھا۔

خاص نکات:

(1) اگر $r = 0$ تو $(x - a)$ جزو ضربی یا عاد ہے $p(x)$ کا کیونکہ

$$p(x) = (x-a)\, q\,(x)$$

اس طرح ہمیں ذیل میں مسئلہ باقی سے ایک نتیجہ اور ملتا ہے۔

(2) اگر $(x - a)$ جزو ضربی یا عاد ہے $p(x)$ کا تو $p(x) = 0$ کی اصل (root)$, a$ ہے اور اس کا معکوس بھی صحیح ہے۔

(3) اگر $p(x)$ کثیر رقمی ہو اور a حقیقی عدد ہو جبکہ $p(a) = 0$ تو a ، کثیر رقمی مساوات $p(x) = 0$ کا حل یا اصل (*Root*) ہے۔

مثال 1. اگر $x^4 - x^3 - 9x + 5$ کو $x - 1$ سے تقسیم کیا جائے تو عمل تقسیم کے بغیر باقی معلوم کیجیے۔

حل: فرض کیجیے۔

$$p(x) = x^4 - x^3 - 9x + 5$$

$$p(1) = (1)^4 - (1)^3 - 9(1) + 5 \quad (\because a = 1)$$

$$= 1 - 1 - 9 + 5 = -4$$

پس باقی $= -4$

مثال 2. ثابت کیجیے کہ اگر $x^3 + 4x^2 - 7x - 3$ کو $(x - 2)$ سے تقسیم کیا جائے تو 7 باقی حاصل ہوتا ہے۔

حل:

$$p(x) = x^3 + 4x^2 - 7x - 3$$

$$p(2) = (2)^3 + 4(2)^2 - 7(2) - 3$$

$$= 8 + 16 - 14 - 3 = 7$$

پس باقی $= 7$

مثال 3. ثابت کیجیے کہ اگر $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$ کی اصل 2 ہے۔

حل: ہمارے علم میں ہے کہ حقیقی عدد a کثیر رقمی مساوات $p(x) = 0$ کا اصل ہے یعنی $p(a) = 0$

فرض کیجیے $p(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$

تو $p(2) = (2)^3 - 6(2)^2 + 11(2) - 6$

$$= 8 - 24 + 22 - 6$$

$$= 0$$

پس $p(x) = 0$ کی ایک اصل 2 ہے۔

نوٹ: $x + 2$ کو $x - (-2)$ لکھا جاسکتا ہے اس لیے $x - a$ کی شکل میں $a = -2$ ہے۔

مشق 4.5

1. مسئلہ باقی کی مدد سے باقی معلوم کیجیے جبکہ

(i) $x^3 - 2x^2 + x - 3$ کو $x - 2$ سے تقسیم کیا جائے۔

(ii) $x^3 + x - 1$ کو $x + 1$ سے تقسیم کیا جائے۔

(iii) $x4 - 2x^2 + 3x + 3$ کو $x - 3$ سے تقسیم کیا جائے۔

2. مسئلہ جزو ضربی کی مدد سے فیصلہ کیجیے کہ مندرجہ ذیل بیانات صحیح یا غلط ہیں؟

(i) $2x^3 - 6x^2 - 5x + 15$ کا عاد یا جز ضربی $x - 3$ ہے۔

(ii) $3x^3 - x^2 - 22x + 24$ کا جزو ضربی $x + 3$ ہے۔

(iii) $x^4 - 16$ کا جزو ضربی $x - 2$ ہے۔

(iv) $x^3 - 8$ کا جزو ضربی $x + 2$ ہے۔

.3 ثابت کیجیے:

(i) $x^3 - 4x^2 + 5x - 2 = 0$ کی اصل 2 ہے۔

(ii) $x^3 - 6x^2 + 5x + 12 = 0$ کی اصل 3 ہے۔

4.10 کلیات اور ان کا استعمال

الجبری اظہاریوں کو مختصر کرنے یا اجزائے ضربی بنانے میں کلیات مددگار ثابت ہوتے ہیں آٹھویں جماعت میں ہم مندرجہ ذیل کلیات حقیقی اعداد a , b اور c کے لیے سیکھ چکے ہیں۔

کلیہ .1	$a(c + d) = ac + ad$
کلیہ .2	$(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$
کلیہ .3	$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
کلیہ .4	$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
کلیہ .5	$(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$

مثال .1 $(4x - 5y)(4x + 5y)(16x^2 + 25y^2)$ کا حاصل ضرب معلوم کیجیے۔

حل:

$$(4x - 5y)(4x + 5y)(16x^2 + 25y^2) = [(4x - 5y)(4x + 5y)](16x^2 + 25y^2)$$

$$= [(4x)^2 - (5y)^2](16x^2 + 25y^2)$$

$$= (16x^2 - 25y^2)(16x^2 + 25y^2)$$

$$= (16x^2)^2 - (25y^2)^2$$

$$= 256x^4 - 625y^4$$

مثال 2. ثابت کیجیے $(x+y-z-t)(x+y+z+t) = x^2+y^2-z^2-t^2+2xy-2zt$

حل:

$$\begin{aligned}(x+y-z-t)(x+y+z+t) &= [(x+y)-(z+t)]\,[(x+y)+(z+t)]\\ &= (x+y)^2-(z+t)^2\\ &= (x^2+2xy+y^2)-(z^2+2zt+t^2)\\ &= x^2+y^2-z^2-t^2+2xy-2zt\end{aligned}$$

مشق 4.6

مندرجہ ذیل کا حاصل ضرب معلوم کیجیے:

1. $(abc-d^2)(abc+d^2)(a^2b^2c^2+d^4)$ **2.** $(x+y+z)(x+y-z)$

3. $(2-x^3)(2+x^3)(4+x^6)(16+x^{12})$ **4.** $(a+b-c+d)(a+b+c-d)$

5. $(\sqrt{x}-\sqrt{y})(\sqrt{x}+\sqrt{y})(x+y)(x^2+y^2)$

مناسب کلیہ کا استعمال کرتے ہوئے مندرجہ ذیل کی قیمت معلوم کیجیے:

6. $(107)^2$ **7.** (67×67) **8.** (1104×1104)

9. $(98)^2$ **10.** 989×989

کلیہ 6. $\boxed{(a+b)^2=(a-b)^2+4ab}$

پڑتال:

$$\begin{aligned}\text{R.H.S.} &= (a-b)^2+4ab\\ &= a^2-2ab+b^2+4ab\\ &= a^2+2ab+b^2\\ &= (a+b)^2 = \text{L.H.S.}\end{aligned}$$

کلیہ 7. $\boxed{(a-b)^2=(a+b)^2-4ab}$

پڑتال:

$$\begin{aligned}\text{R.H.S.} &= (a+b)^2-4ab\\ &= a^2+2ab+b^2-4ab\\ &= a^2-2ab+b^2\\ &= (a-b)^2 = \text{L.H.S.}\end{aligned}$$

کلیہ 8. $\boxed{(a+b)^2-(a-b)^2=4ab}$

پڑتال:
$$L.H.S. = (a+b)^2-(a-b)^2$$
$$= (a^2+2ab+b^2)-(a^2-2ab+b^3)$$
$$= a^2+2ab+b^2-a^2+2ab-b^2$$
$$= 4ab = R.H.S.$$

کلیہ 9. $\boxed{(a+b)^2+(a-b)^2=2(a^2+b^2)}$

پڑتال:
$$L.H.S. = (a+b)^2+(a-b)^2$$
$$= a^2+2ab+b^2+a^2-2ab+b^2$$
$$= 2a^2+2b^2$$
$$= 2(a^2+b^2) = R.H.S.$$

مثال 1. اگر $x-\frac{1}{x}=2$ تو (i) $x^2+\frac{1}{x^2}$ اور (ii) $x^4+\frac{1}{x^4}$ کی قیمت معلوم کیجیے۔

حل:

(i) $x^2+\frac{1}{x^2}$

کیونکہ $x-\frac{1}{x}=2$

دونوں طرف مربع لینے سے

$$(x-\frac{1}{x})^2=(2)^2$$
$$\Rightarrow x^2-2+\frac{1}{x^2}=4$$
$$\Rightarrow x^2+\frac{1}{x^2}=4+2=6$$

(ii) $x^4+\frac{1}{x^4}$

کیونکہ $x^2+\frac{1}{x^2}=6$

دونوں طرف مربع لینے سے

$$(x^2+\frac{1}{x^2})^2=(6)^2$$
$$\Rightarrow x^4+2+\frac{1}{x^4}=36$$
$$\Rightarrow x^4+\frac{1}{x^4}=36-2=34$$

مثال 2. اگر $a+b=5$, $ab=3$ تو a^2+b^2 کی قیمت معلوم کیجیے۔

حل:
$$a+b=5$$

دونوں طرف مربع لینے سے $(a+b)^2=(5)^2$

یا $a^2+2ab+b^2=25$

یا $a^2+2(3)+b^2=25 \quad (\because ab=3)$

یا $a^2+b^2=25-6=19$

مثال 3. اگر $a + b = 5$ اور $a - b = 3$ تو مندرجہ ذیل کی قیمت معلوم کیجیے۔

(i) $a^2 + b^2$ (ii) $4ab$ (iii) $16\,ab(a^2 + b^2)$

حل: (i) $a^2 + b^2$ کی قیمت معلوم کرنے کے لیے ہم مندرجہ ذیل کلیہ استعمال کرتے ہیں۔

$$(a + b)^2 + (a - b)^2 = 2\,(a^2 + b^2)$$

$a + b$ اور $a - b$ کی قیمتیں درج کرنے سے

$$2(a^2 + b^2) = (5)^2 + (3)^2 = 25 + 9 = 34$$

یا $$(a^2 + b^2) = \frac{34}{2} = 17$$

(ii) $4ab$ کی قیمت معلوم کرنے کے لیے مندرجہ ذیل کلیہ استعمال کرتے ہیں۔

$$(a + b)^2 - (a - b)^2 = 4ab$$

$a + b$ اور $a - b$ کی قیمتیں رکھنے سے

$$4ab = (5)^2 - (3)^2 = 25 - 9$$

یا $$4ab = 16$$

(iii) $16ab(a^2 + b^2)$ کی قیمت معلوم کرنے کے لیے ہم مندرجہ ذیل کلیہ استعمال کرتے ہیں۔

$$16ab\,(a^2 + b^2) = 4(4ab)\,(a^2 + b^2)$$

(i) اور (ii) سے $a^2 + b^2$ اور $4ab$ کی قیمتیں درج کرنے سے

$$16ab\,(a^2 + b^2) = 4\,(16)\,(17)$$

یا $$16ab(a^2 + b^2) = 1088$$

مثال 4. اگر $a + b = 7$ اور $ab = 11$ تو $a - b$ کی قیمت معلوم کیجیے۔

حل: ہم جانتے ہیں کہ: $(a + b)^2 - (a - b)^2 = 4ab$

یا $$(a + b)^2 - 4ab = (a - b)^2$$

یا $$(a - b)^2 = (a + b)^2 - 4\,ab$$

$a + b$ اور ab کی قیمتیں درج کرنے سے

$$(a - b)^2 = (7)^2 - 4\,(11) = 49 - 44 = 5$$

دونوں اطراف کا جذرالمربع لینے سے $(a - b) = \pm\sqrt{5}$

مشق 4.7

.1 a^2+b^2 کی قیمت معلوم کیجیے جبکہ

(i) $a+b=4, \quad ab=3$ **(ii)** $a-b=7, \quad ab=13$

(iii) $a-b=5, \quad a+b=-9$ **(iv)** $a+b=-8, \quad a-b=-6$

.2 $4ab$ کی قیمت معلوم کیجیے جبکہ

(i) $a+b=9$ اور $a-b=-5$ **(ii)** $a-b=8$ اور $a+b=-7$

.3 $8ab(a^2+b^2)$ کی قیمت معلوم کیجیے جبکہ

(i) $a+b=-5$ اور $a-b=5$ **(ii)** $a-b=6$ اور $a+b=4$

.4 $x-y$ کی قیمت معلوم کیجیے جبکہ

(i) $xy=20$ اور $x+y=-9$ **(ii)** $xy=10$ اور $x+y=7$

.5 مندرجہ ذیل کی قیمت معلوم کیجیے۔

(i) $x^2+\frac{1}{x^2}$ جبکہ $x+\frac{1}{x}=3+\sqrt{2}$

(ii) $x^2+\frac{1}{x^2}$ جبکہ $x-\frac{1}{x}=\sqrt{5}$

(iii) $x^2+\frac{1}{x^2}$ جبکہ $x+\frac{1}{x}=3$

(iv) $x^4+\frac{1}{x^4}$ جبکہ $x+\frac{1}{x}=7$

(v) $x^4+\frac{1}{x^4}$ جبکہ $x+\frac{1}{x}=3$

کلیہ 10. $\boxed{(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca}$

پڑتال:

$$(a+b+c)^2=(a+b+c)(a+b+c)$$

$$=a(a+b+c)+b(a+b+c)+c(a+b+c)$$

$$=a^2+ab+ac+ba+b^2+bc+ca+cb+c^2$$

$$=a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca = \text{R.H.S}$$

یا $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca$

مثال 1. $(2a+4b-3c)^2$ کو کھولیے۔

حل: $(a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca$ کا استعمال کرتے ہوئے:

$$(2a+4b-3c)^2 = (2a)^2+(4b)^2+(-3c)^2+2(2a)(4b)+2(4b)(-3c)+2(-3c)(2a)$$

$$= 4a^2+16b^2+9c^2+16ab-24bc-12\,ca$$

مثال 2. $(x-2y-3z)^2$ کو کھولیے۔

حل: $(x-2y-3z)^2 = (x)^2+(-2y)^2+(-3z)^2+2(x)(-2y)+2(-2y)(-3z)+2(-3z)(x)$

$$= x^2+4y^2+9z^2-4xy+12yz-6zx$$

مثال 3. اگر $a+b+c=8$ اور $ab+bc+ca=17$ تو $a^2+b^2+c^2$ کی قیمت معلوم کیجیے۔

حل: $a+b+c=8$ دونوں اطراف مربع لینے سے

$$(a+b+c)^2 = (8)^2$$

یا $a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca = 64$

یا $a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca) = 64$

یا $a^2+b^2+c^2 = 64-2\,(ab+bc+ca)$

$$= 64-2\,(17) \qquad (\because ab+bc+ca=17)$$

$$= 64-34$$

یا $a^2+b^2+c^2 = 30$

مثال 4. اگر $a^2+b^2+c^2=14$ اور $ab+b\,c+ca=11$ تو $a+b+c$ کی قیمت معلوم کیجیے۔

حل: ہم جانتے ہیں کہ $(a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2+2\,(ab+bc+ca)$

$a^2+b^2+c^2$ اور $ab+bc+ca$ کی قیمتیں درج کرنے سے

$$(a+b+c)^2 = 14+2\,(11) = 14+22 = 36$$

$$a+b+c = \pm\sqrt{36} = \pm\ 6$$

مشق 4.8

.1 مندرجہ ذیل کو کھولیے:

(i) $(x+3y+2z)^2$ (ii) $(4x-3y+5z)^2$

(iii) $(7x-2y-3z)^2$ (iv) $(\frac{1}{2}a-\frac{2}{3}b+\frac{3}{4})^2$

.2 مندرجہ ذیل کی قیمت معلوم کیجیے۔

(i) $p^2+q^2+r^2$ جبکہ $p+q+r=\sqrt{7}$ اور $pq+qr+rp=2$

(ii) $a^2+b^2+c^2$ جبکہ $a+b+c=\frac{5}{3}$ اور $ab+bc+ca=-\frac{1}{9}$

(iii) $x^2+y^2+z^2$ جبکہ $x+y+z=12$ اور $xy+yz+zx=17$

(iv) $pq+qr+rp$ جبکہ $p+q+r=\sqrt{17}$ اور $p^2+q^2+r^2=9$

(v) $xy+yz+zx$ جبکہ $x+y+z=9$ اور $x^2+y^2+z^2=81$

(vi) $ab+bc+ca$ جبکہ $a+b+c=13$ اور $a^2+b^2+c^2=69$

کلیہ 11. $\boxed{(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3=a^3+b^3+3ab(a+b)}$

پڑتال:

$$
\begin{aligned}
(a+b)^3 &= (a+b)(a+b)^2 \\
&= (a+b)(a^2+2ab+b^2) \\
&= a^3+2a^2b+ab^2+a^2b+2ab^2+b^3 \\
&= a^3+b^3+3a^2b+3ab^2 \\
&= a^3+b^3+3ab(a+b)
\end{aligned}
$$

کلیہ 12. $\boxed{(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3=a^3-b^3-3ab(a-b)}$

پڑتال:

$$
\begin{aligned}
(a-b)^3 &= (a-b)(a-b)^2 \\
&= (a-b)(a^2-2ab+b^2) \\
&= a^3-2a^2b+ab^2-a^2b+2ab^2-b^3 \\
&= a^3-b^3-3a^2b+3ab^2 \\
&= a^3-b^3-3ab(a-b)
\end{aligned}
$$

مثال 1. $(3x+5y)$ کا مکعب معلوم کیجیے۔

حل: ہم جانتے ہیں کہ:

$$(a+b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a+b)$$

$$(3x+5y)^3 = (3x)^3 + (5y)^3 + 3(3x)(5y)(3x+5y)$$

$$= 27x^3 + 125y^3 + 45xy(3x+5y)$$

$$= 27x^3 + 125y^3 + 135x^2y + 225xy^2$$

مثال 2. $2x-7y$ کا مکعب معلوم کیجیے۔

حل:

$$(2x-7y)^3 = (2x)^3 - (7y)^3 - 3(2x)(7y)(2x-7y)$$

$$= 8x^3 - 343y^3 - 42xy(2x-7y)$$

$$= 8x^3 - 343y^3 - 84x^2y + 294xy^2$$

مثال 3. x^3+y^3 کی قیمت معلوم کیجیے جبکہ $x+y=4$ اور $xy=5$

حل:

$$x+y=4$$

دونوں اطراف کا مکعب لینے سے

$$(x+y)^3 = (4)^3$$

یا $x^3+y^3+3xy(x+y)=64$

$x+y$ اور xy کی قیمتیں درج کرنے سے

$$x^3+y^3+3(5)(4)=64$$

یا $x^3+y^3 = 64-60 = 4$

مثال 4. $27x^3-\frac{1}{x^3}$ کی قیمت معلوم کیجیے جبکہ $3x-\frac{1}{x}=2$

حل:

$$3x-\frac{1}{x}=2$$

دونوں اطراف کا مکعب لینے سے

$$\left(3x-\frac{1}{x}\right)^3 = (2)^3$$

یا $(3x)^3 - \left(\frac{1}{x}\right)^3 - 3(3x)\left(\frac{1}{x}\right)\left(3x-\frac{1}{x}\right) = 8$

یا $27x^3 - \frac{1}{x^3} - 9(2) = 8 \quad \left(\because 3x-\frac{1}{x}=2\right)$

یا $27x^3 - \frac{1}{x^3} = 8+18 = 26$

مشق 4.9

.1 مندرجہ ذیل کا مکعب معلوم کیجیے۔

(i) $3x+4$ (ii) $5x+2y$ (iii) $4a+3b$

(iv) $x-\frac{1}{x}$ (v) $3x-\frac{1}{3y}$ (vi) $\frac{x}{y}-\frac{y}{x}$

.2 مندرجہ ذیل کی قیمت معلوم کیجیے۔

(i) x^3+y^3 جبکہ $x+y=-5$ اور $xy=8$

(ii) x^3-y^3 جبکہ $x-y=6$ اور $xy=10$

(iii) y^3-z^3 جبکہ $y-z=4$ اور $yz=-5$

(iv) $b^3+\frac{1}{b^3}$ جبکہ $b+\frac{1}{b}=3$ (v) $x^3-\frac{1}{x^3}$ جبکہ $x-\frac{1}{x}=4$

(vi) $8x^3-\frac{1}{27x^3}$ جبکہ $2x-\frac{1}{3x}=5$ (vii) $a^3+\frac{1}{8a^3}$ جبکہ $a+\frac{1}{2a}=6$

.3 اگر $x-y=2\sqrt{2}$ تو ثابت کیجیے: $x^3-y^3-6\sqrt{2}xy=16\sqrt{2}$

.4 اگر $a+b=4$ تو ثابت کیجیے: $a^3+b^3+12ab=64$

.5 اگر $a+\frac{1}{a}=2$ تو ثابت کیجیے: $a^2+\frac{1}{a^2}=a^4+\frac{1}{a^4}=a^3+\frac{1}{a^3}$

کلیہ 13. $\boxed{a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)}$

پڑتال:

$$(a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3-a^2b+ab^2+a^2b-ab^2+b^3$$

$$=a^3+b^3$$

اس کلیہ کو دو مکعبوں کے مجموعے کا کلیہ کہتے ہیں۔

کلیہ 14. $\boxed{a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)}$

پڑتال:

$$(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3+a^2b+ab^2-a^2b-ab^2-b^3$$

$$=a^3-b^3$$

اس کلیہ کو دو مکعبوں کے فرق کا کلیہ کہتے ہیں۔

مثال 1. عمل ضرب کے بغیر $(2a-3b)(4a^2+6ab+9b^2)$ کا حاصل ضرب معلوم کیجیے۔

حل: $(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3$ کا استعمال کرتے ہوئے

$$(2a-3b)(4a^2+6ab+9b^2)=(2a-3b)[(2a)^2+(2a)(3b)+(3b)^2]$$
$$=(2a)^3-(3b)^3$$
$$=8a^3-27b^3$$

مثال 2. مختصر کیجیے: $(x+2)(x^2-2x+4)(x-2)(x^2+2x+4)$

حل: $(x+2)(x^2-2x+4)(x-2)(x^2+2x+4)$

$$=(x+2)[(x)^2-(x)(2)+(2)^2](x-2)[(x)^2+(x)(2)+(2)^2]$$
$$=[(x)^3+(2)^3][(x)^3-(2)^3]$$
$$=(x^3+8)(x^3-8)$$
$$=(x^3)^2-(8)^2$$
$$=x^6-64$$

کلیہ 15. $\boxed{(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)=a^3+b^3+c^3-3abc}$

اس کلیہ کی پڑتال $a+b+c$ کی $a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca$ سے عام ضرب کرنے سے کی جاسکتی ہے

مثال 1. عمل ضرب کے بغیر $(3a-2b-c)(9a^2+4b^2+c^2+6ab-2bc+3ca)$ کا حاصل ضرب معلوم کیجیے۔

حل: کلیے کے مطابق ترتیب دیتے ہوئے:

$$(3a-2b-c)\{(3a)^2+(-2b)^2+(-c)^2-(3a)(-2b)-(-2b)(-c)-(-c)(3a)\}$$
$$=(3a)^3+(-2b)^3+(-c)^3-3(3a)(-2b)(-c)$$
$$=27a^3-8b^3-c^3-18abc$$

مثال 2. $a^3+b^3+c^3-3abc$ کی قیمت معلوم کیجیے جبکہ $a^2+b^2+c^2=88$ اور $a+b+c=10$

حل: $a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$

$a^2 + b^2 + c^2$ اور $a + b + c$ کی قیمتیں درج کرنے سے

$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (10)\ \{88 - (ab + bc + ca)\} \quad \ldots \textbf{(i)}$$

اب ہم $ab + bc + ca$ کی قیمت معلوم کریں گے۔

$$\because \quad a + b + c = 10$$

$$(a + b + c)^2 = (10)^2$$

$$\Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca = 100$$

$$\Rightarrow \quad 88 + 2\,(ab + bc + ca) = 100 \quad (\because a^2 + b^2 + c^2 = 88)$$

$$\Rightarrow \quad 2(ab + bc + ca) = 100 - 88 = 12$$

$$\Rightarrow \quad ab + bc + ca = \frac{12}{2} = 6$$

اب $ab + bc + ca$ کی قیمت (i) میں درج کرنے سے

$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = 10\ (88 - 6) = 10\ (82) = 820$$

مشق 4.10

کلیات کی مدد سے مختصر کیجیے:

.1 $(y + \frac{1}{y})\ (y^2 - 1 + \frac{1}{y^2})$ .2 $(\sqrt{x} - \sqrt{y}\,)\ (x + \sqrt{xy} + y)$

کلیات کی مدد سے ثابت کیجیے:

.3 $(a + 2)\ (a - 2)\ (a^2 - 2a + 4)\ (a^2 + 2a + 4) = a^6 - 64$

.4 $(3x + 2y)\ (3x - 2y)\ (9x^2 + 6xy + 4y^2)\ (9x^2 - 6xy + 4y^2) = 729x^6 - 64y^6$

کلیات کی مدد سے حاصل ضرب معلوم کیجیے:

.5 $(l + m - 2n)\ \ (l^2 + m^2 + 4n^2 - lm + 2mn + 2nl)$

.6 $(2x - 3y - 4y)\ \ (4x^2 + 9y^2 + 16z^2 + 6xy - 12yz + 8zx)$

$l^3 + m^3 + n^3 - 3lmn$ کی قیمت معلوم کیجیے جبکہ

.7 $l + m + n = 15$ اور $lm + mn + nl = 74$

.8 $l + m + n = 4$ اور $lm + mn + nl = 7$

.9 $l^2 + m^2 + n^2 = 3$ اور $l + m + n = 7$

متفرق مشق IV

.1 مندرجہ ذیل میں سے کثیر رقمی، ناطق اور غیر ناطق اظہاریے علیحدہ علیحدہ کیجیے۔

(i) $x+\sqrt{3}$ (ii) $x^2+\frac{1}{x^2}$ (iii) $\frac{a+b}{3}$ (iv) $y+\frac{1}{\sqrt{y}}$

(v) x^2-xy-y^2 (vi) $\frac{1}{p}-p$ (vii) $\frac{1}{2}$ (viii) π

.2 مندرجہ ذیل میں متغیرات کی تعداد لکھیے۔

(a) $x^2+y^2-2^2$ (b) $x+xy+2$ (c) $xyz+x-2$

(d) $a^2+b^2+c^2$ (e) $\frac{1}{x}+x$ (f) $\frac{\pi}{xyz}$

.3 مندرجہ ذیل میں متغیرات کے عددی سر اور مستقل رقم لکھیے۔

(a) $x+y-\frac{1}{2}$ (b) $6-3x-\frac{1}{2}y-3y^2$

(c) $\frac{1}{4}x^2-\sqrt{3}\,y+2z^2-1$ (d) $2xyz-k$

.4 مندرجہ ذیل کثیر رقمیوں کا درجہ معلوم کیجیے۔

(a) $x+y^{\frac{1}{2}}+z$ (b) xy^2+2 (c) $x+xyz-4$

(d) 2 (e) $t^{\frac{1}{2}}.x^{\frac{1}{2}}.y^{\frac{3}{2}}.z^{\frac{1}{2}}+1$ (f) $x+5^3$

.5 مندرجہ ذیل اظہاریوں کی قیمت معلوم کیجیے:

(i) x^2-xy+y^2 جبکہ ; $x=-2,\ y=2$

(ii) $\frac{a^2-2ab+b^2}{a+b}$ جبکہ ; $a=0,\ b=-2$

(iii) $6-3x-\frac{1}{3}y-3y^2$ جبکہ ; $x=1,\ y=3$

(iv) $(a+b)(a^2-ab+b^2)$ جبکہ ; $a=2,\ b=3$

.6 a کی کس قیمت کے لیے $9x^3-6x^2+3x-a$ کو x^2-2x+3 پورا پورا تقسیم کرے گا؟

.7 مندرجہ ذیل کو مکمل کیجیے:

(i) $(7a+5)(7a-5) = -----$ (ii) $(a+3b)^2 = a^2+6ab+-----$

(iii) $(3a-2b)^2 = 9a^2 ----- +4b$ (iv) $(3a^3+b^3)^3 = -----$

(v) $(p-q)^3 = p^3 ---- + ---- q^3$ (vi) $(2a^2-5y^2-3z^2)^2 = -----$

(vii) $(x+2)(x+5) = x^2 + --- + 10$ (viii) $(2l+3m^2)^2-(2l-3m^2)^2 = -----$

.8 اگر $x-\frac{1}{x}=3$ تو $x^2+\frac{1}{x^2}$ اور $x^4+\frac{1}{x^4}$ کی قیمتیں معلوم کیجیے۔

.9 $8ab(a^2+b^2)$ کی قیمت معلوم کیجیے جبکہ $a+b=15$ اور $a-b=-5$

.10 $(\frac{1}{2}x-\frac{1}{3}y-\frac{3}{2}z)^2$ کو کھولیے۔

.11 c^3+d^3 کی قیمت معلوم کیجیے جبکہ $c+d=-4$ اور $cd=-5$

.12 مندرجہ ذیل بیانات کو غور سے پڑھیے اور درست جواب کو منتخب کیجیے۔

(i) کثیر رقمی x^2+7x+3 بلحاظ رقوم ________ کہلاتا ہے۔

(a) دو رقمی (b) سہ رقمی (c) یک رقمی (d) اِن میں سے کوئی نہیں

(ii) کثیر رقمی x^2+xy^2+y کا درجہ ________ ہے۔

(a) 2 (b) 3 (c) 4 (d) 1

(iii) الجبری اظہاریہ $2a^3y+4ay^2-5a^2y^3$ بلحاظ y ترتیب نزولی میں ________ ہے۔

(a) $-5a^2y^3+4a^2y+2a^3y$ (b) $4ay^2-5a^2y^3+2a^3y$

(c) $2a^3y-5a^2y^3+4ay^2$ (d) $2a^3y+4ay^2-5a^2y^3$

(iv) اگر $x=1$ اور $y=1$ تو $x-y+xy$ کی قیمت ________ ہے۔

(a) 1 (b) 0 (c) 2 (d) -1

(v) $x^3 + 4x^2 - 7x + 3$ کو $x - 1$ سے تقسیم کرنے سے باقی ---------- حاصل ہوتا ہے۔

(a) 0　　(b) 1　　(c) 2　　(d) -1

(vi) $(a - b + c)^2 =$ ---------

(a) $a^2 - b^2 + c^2 - 2ab - 2bc + 2ca$　　(b) $a^2 + b^2 + c^2 - 2ab - 2bc + 2ca$

(c) $a^2 + b^2 + c^2 + 2ab - 2bc + 2ca$　　(d) $a^2 + b^2 + c^2 - 2ab - 2bc + 2ca$

(vii) $(x - 6)(x - 4) =$ ---------

(a) $x^2 - 10x - 24$　　(b) $x^2 + 10x - 24$　　(c) $x^2 - 24x + 24$　　(d) $x^2 - 10x + 24$

(viii) اگر $a + b = 2$ اور $a - b = 2$ تو $a^2 + b^2$ کی قیمت -------- ہے۔

(a) 2　　(b) $\frac{3}{2}$　　(c) -1　　(d) 4

(ix) $(\sqrt{x} + \sqrt{y})(\sqrt{x} - \sqrt{y}) =$ ---------

(a) $(\sqrt{x} + \sqrt{y})^2$　　(b) $(\sqrt{x} - \sqrt{y})^2$　　(c) $(\sqrt{x} - \sqrt{y})$　　(d) $x - y$

(x) $(x - y)^3 =$ ---------

(a) $x^3 - y^3 - 3xy$　　(b) $x^3 + y^3 - 3xy$　　(c) $x^3 - y^3 - 3x^2y + 3xy^2$　　(d) $x^3 - y^3 + 3x^2y - 3xy^2$

یونٹ 5

عملِ تجزی، عادِ اعظم، ذُو اضعاف اقل اَلجبری کسور اور جذر المرُبع

5.1 اعادہ

گزشتہ جماعتوں میں ہم مندرجہ ذیل کلیات پڑھ چکے ہیں۔

1. $Ka + Kb + Kc \;=\; K(a+b+c) \;=\; (a+b+c)K$
2. $a^2 \pm 2ab + b \;=\; (a \pm b)^2$
3. $a^2 - b^2 \;=\; (a-b)(a+b) \;=\; (a+b)(a-b)$
4. $x^2 + px + q \;=\; (x+a)(x+b)$، جبکہ $p = (a+b)$ اور $q = ab$

مثال 1. تجزی کیجیے۔ $a(x+2y) - b(x+2y)$

حل: $a(x+2y) - b(x+2y) = (x+2y)(a-b)$

مثال 2. تجزی کیجیے۔ $a^n(x-2z) + b^{n-1}(x-2z) - c^{n-2}(x-2z)$

حل: $a^n(x-2z) + b^{n-1}(x-2z) - c^{n-2}(x-2z) = (a^n + b^{n-1} - c^{n-2})(x-2z)$

مثال 3. تجزی کیجیے۔ $100m^4 + 20m^2n + n^2$

حل: $100m^4 + 20m^2n + n^2 = (10m^2)^2 + 2(10m^2)(n) + (n)^2$

کیونکہ، $a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2$

لہٰذا $100m^4 + 20m^2n + n^2 = (10m^2 + n)^2$

مثال 4. تجزی کیجیے۔ $16x^2 - 72xy^2 + 81y^4$

حل: $16x^2 - 72xy^2 + 81y^4 = (4x)^2 - 2(4x)(9y^2) + (9y^2)^2$

کیونکہ، $a^2 - 2ab + b^2 = (a-b)^2$

لہٰذا $16x^2 - 72xy^2 + 81y^4 = (4x - 9y^2)^2$

مثال 5. تجزی کیجیے۔ $81x^4 - 625y^8$

حل:
$$81x^4 - 625y^8 = (9x^2)^2 - (25y^4)^2$$
کیونکہ،
$$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$$
لہٰذا
$$81x^4 - 625y^8 = (9x^2 - 25y^4)(9x^2 + 25y^4)$$
$$= \{(3x)^2 - (5y^2)^2\}(9x^2 + 25y^4)$$
$$= \{(3x - 5y^2)(3x + 5y^2)(9x^2 + 25y^4)$$

مثال 6. تجزی کیجیے۔ $x^2 + 15x + 36$

حل:
$$x^2 + 15x + 36 = x^2 + (3 + 12)x + 36$$
$$= x^2 + 3x + 12x + 36$$
$$= x(x+3) + 12(x+3) = (x+3)(x+12)$$

مشق 5.1

مندرجہ ذیل کی تجزی کیجیے۔

1. $3t^{2n} - 6t^{2n-3} + 9t^{2n-5}$
2. $3(a+3)^2(x-2) + 6(a+3)(x-2)^2$
3. $(ab + cd)^2 - (ac - bd)^2$
4. $2x^2y^3 + 2x^4y - 3x^3y^2 - 3xy^4$
5. $a^3b^2c + a^2b^3c + ab^4c + a^4bc$
6. $al(pq + qr) + bm(pq + qr) + cn(pq + qr)$

مندرجہ ذیل کے اجزائے ضربی معلوم کیجیے۔

7. $a^2c^2 + 4ac + 4$
8. $x^2y^4 + 18xy^2 + 81$
9. $(a-b)^2 + 18(a-b) + 81$
10. $m^{2n}t^{2n} + 8m^nt^nz^n + 16z^{2n}$
11. $x^2y^2 + 0.1xy + 0.0025$
12. $\frac{4}{9}x^2 + 2xy^2 + \frac{9}{4}y^4$

تجزی کیجیے۔

13. $a^2b^2 - 6ab + 9$
14. $x^2y^2z^2 - 4xyz + 4$
15. $x^4y^2 - 2 + \frac{1}{x^4y^2}$
16. $a^4 - 0.4a^2 + 0.04$
17. $9 - 6(a-3b)^2 + (a-3b)^4$
18. $625 - 50a^2b + a^4b^2$

مندرجہ ذیل کی تجزی کیجیے۔

19. $ax^4 - \frac{a}{16}$
20. $a^4b^6 - 144c^2$
21. $(a-b)^2 - 9c^2$
22. $s^{2n} - t^{2n}$
23. $(a-b)^2 - (c+d)^2$
24. $4(x+2y)^2 - 9(x-y)^2$

مندرجہ ذیل کے اجزائے ضربی معلوم کیجیے۔

25. $x^2 + 15x + 36$
26. $x^2 + 15x - 100$
27. $z^4 - 2z^2 - 15$
28. $r^6 - 10r^3 + 16$
29. $a^2x^4 - 20ax^2y^2 - 96y^4$
30. $(a+b)^2 + 20(a+b) + 36$

5.2 $a^2 - b^2$ کی صورت میں تحویل ہونے والے اظہاریوں کی تجزی

اب ہم ان اظہاریوں کی عمل تجزی پر بحث کریں گے جو $a^2 - b^2$ کی صورت میں تحویل کیے جا سکتے ہوں۔ ہم جانتے ہیں کہ $(a - b)$ اور $(a + b)$ ، $a^2 - b^2$ کے اجزائے ضربی ہیں۔

مندرجہ ذیل مثالوں کو ملاحظہ کیجیے۔

مثال 1. تجزی کیجیے۔ $9x^2 - y^2 + z^2 + 6xz$

حل:

$$
\begin{aligned}
9x^2 - y^2 + z^2 + 6xz &= (9x^2 + z^2 + 6xz) - y^2 \\
&= \{(3x)^2 + 2(3x)(z) + (z)^2\} - y^2 \\
&= (3x + z)^2 - y^2 \\
&= \{(3x + z) + y\}\{(3x + z) - y\} \\
&= (3x + y + z)(3x - y + z)
\end{aligned}
$$

مثال 2. تجزی کیجیے۔ $(x^2 + y^2 - z^2)^2 - 4x^2y^2$

حل:

$$
\begin{aligned}
(x^2 + y^2 - z^2)^2 - 4x^2y^2 &= (x^2 + y^2 - z^2)^2 - (2xy)^2 \\
&= \{(x^2 + y^2 - z^2) + 2xy\}\{(x^2 + y^2 - z^2) - 2xy\} \\
&= \{(x^2 + 2xy + y^2) - z^2\}\{(x^2 - 2xy + y^2) - z^2\} \\
&= \{(x + y)^2 - z^2\}\{(x - y)^2 - z^2\} \\
&= \{(x + y + z)(x + y - z)\}\{(x - y + z)(x - y - z)\} \\
&= (x + y + z)(x + y - z)(x - y + z)(x - y - z)
\end{aligned}
$$

مثال 3. تجزی کیجیے۔ $x^4 + 4y^4$

حل:

$$x^4 + 4y^4 = (x^2)^2 + (2y^2)^2$$

$2(x^2)(2y^2)$ کو $x^4 + 4y^4$ میں جمع کرنے سے مکمل مربع بنا سکتے ہیں۔

اب $2(x^2)(2y^2)$ کو جمع اور تفریق کرنے سے

$$
\begin{aligned}
x^4 + 4y^4 &= \{(x^2)^2 + 2(x^2)(2y^2) + (2y^2)^2\} - 2(x^2)(2y^2) \\
&= (x^2 + 2y^2)^2 - 4x^2y^2 \\
&= (x^2 + 2y^2)^2 - (2xy)^2 \\
&= \{(x^2 + 2y^2) + 2xy\}\{(x^2 + 2y^2) - 2xy\} \\
&= (x^2 + 2xy + 2y^2)(x^2 - 2xy + 2y^2)
\end{aligned}
$$

مشق 5.2

.1 مندرجہ ذیل کے اجزائے ضربی معلوم کیجیے۔

(i) a^2-b^2-2a+1 (ii) $1-x^2-y^2+2xy$ (iii) $y^4+2y^3z-2yz^3-z^4$

(iv) $4a^2-9b^2-2a+\frac{1}{4}$ (v) $x^2-y^2-x+\frac{1}{4}$ (vi) $a^2-b^2+9c^2+6ac$

(vii) $(x^2+y^2+z^2)^2-4x^2y^2$ (viii) $x^2+y^2+2xy-49z^2$ (ix) $s^2-16+8t-t^2$

.2 مندرجہ ذیل کی تجزی کیجیے۔

(i) $4a^4+625b^4$ (ii) $1+4b^4$ (iii) a^4+a^2+1

(iv) a^8+a^4+1 (v) $64x^8+y^8$ (vi) r^4+4s^4

(vii) $16a^4-97a^2b^2+81b^4$ (viii) $9x^4-28x^2z^2+16z^4$

(ix) $x^2-y^2-z^2-2yz+x+y+z$

5.3 ax^2+bx+c کی طرز کے اظہاریوں کی تجزی

ہم پہلے سیکھ چکے ہیں کہ x^2+px+q کے اجزائے ضربی $(x+a)$ اور $(x+b)$ ہیں۔ جبکہ $p=a+b$ اور $q=ab$، ax^2+bx+c جبکہ a , b اور c صحیح اعداد ہوں، کی طرز کے اظہاریے کو دو رقموں (Binomials) میں تحویل کر سکتے ہیں۔ اس طرح کہ دیئے ہوئے اظہاریے کی پہلی اور تیسری رقوم کے حاصل ضرب کے اجزائے ضربی سے درمیانی رقم حاصل ہو۔

طریقہ: .1 x^2 کا عددی سر "a"، x کا عددی سر "b" اور مستقل رقم c معلوم کیجیے۔

.2 دو اعداد p اور q معلوم کیجیے اس طرح کہ $p+q=b$ اور $pq=ac$

.3 ax^2+bx+c کے اجزائے ضربی $(ax+p)$ اور $(x+\frac{q}{a})$ ہیں۔

مندرجہ ذیل مثالوں میں اس کی وضاحت کی جاتی ہے۔

مثال 1. $7x^2-12x+5$ کے اجزائے ضربی معلوم کیجیے۔

حل: یہاں $a=7$, $b=-12$, $c=5$

ہمیں p اور q معلوم کرنا ہے جبکہ $p+q=-12$ اور $pq=ac=7\times5=35$

اگر $p=-7$ اور $q=-5$ ہو تو دونوں شرائط پوری ہوتی ہیں۔ لہٰذا

$$7x^2 - 12x + 5 = 7x^2 - 7x - 5x + 5$$
$$= 7x(x-1) - 5(x-1)$$
$$= (x-1)(7x-5)$$

مثال 2. $15h^2x^2 - 22hx + 8$ کے اجزائے ضربی معلوم کیجیے۔

حل: $15h^2x^2 - 22hx + 8 = 15(hx)^2 - 22hx + 8$

یہاں $a = 15 \;,\; b = -22 \;,\; c = 8$

$b = -22$ کو $-10 - 12$ اور $ac = 120$ کو $(-10) \times (-12)$ لکھیے یعنی

$$p = -10 \;,\; q = -12$$

$$15h^2x^2 - 22hx + 8 = 15h^2x^2 - 10hx - 12hx + 8$$
$$= 5hx(3hx-2) - 4(3hx-2)$$
$$= (3hx-2)(5hx-4)$$

مشق 5.3

.1 اجزائے ضربی معلوم کیجیے۔

(i) $2a^2 + a - 1$ (ii) $6a^2 + 11a - 10$ (iii) $25b^2 - 15b + 2$

(iv) $12x^2 - 13x + 3$ (v) $5x^2 - 13x - 6$ (vi) $18y^2 + 9y - 20$

.2 مندرجہ ذیل کی تجزی کیجیے۔

(i) $24x^2 - 81x + 27$ (ii) $36x^2 + 154x - 36$ (iii) $7y^2 - 14y - 21$

.3 تجزی کیجیے۔

(i) $6xy^2z - x^2y^2z - 2x^3y^2z$ (ii) $-3x^{2n} + 11x^n + 4$ (iii) $6(xy)^{2n} + 7(xy)^n - 5$

.4 مندرجہ ذیل کے اجزائے ضربی معلوم کیجیے۔

(i) $2(s-t)^2 + (s-t) - 1$ (ii) $25(s+t)^2 - 15(s+t) + 2$

(iii) $5(2x+y)^4 - 13(2x+y)^2 - 6$ (iv) $12(x-2y)^4 - 11(x-2y)^2 + 2$

5.4 $a^3 \pm b^3$ کی طرز کے اظہاریوں کی تجزی

اگر a اور b دو حقیقی اعداد ہوں تو

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$$

اور
$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$$

پس اظہاریے $a^3 + b^3$ کے اجزائے ضربی $(a + b)$ اور $(a^2 - ab + b^2)$ ہیں۔

اسی طرح $a^3 - b^3$ کے اجزائے ضربی $(a - b)$ اور $(a^2 + ab + b^2)$ ہیں۔

$a^3 + b^3$ اور $a^3 - b^3$ کی طرز کے اظہاریوں کی عمل تجزی مندرجہ ذیل مثالوں سے واضح کی جاتی ہے۔

مثال 1. $8x^3 + 27$ کے اجزائے ضربی معلوم کیجیے۔

حل:
$$8x^3 + 27 = (2x)^3 + (3)^3$$

$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$ جبکہ $a = 2x$ اور $b = 3$ کا استعمال کرنے سے:

$$8x^3 + 27 = (2x + 3)\{(2x)^2 - (2x)(3) + (3)^2\}$$
$$= (2x + 3)(4x^2 - 6x + 9)$$

مثال 2. $a^6 - 64b^6$ کے اجزائے ضربی معلوم کیجیے۔

حل: ہم پہلے دیے ہوئے اظہاریے کو $a^2 - b^2$ کی صورت میں لکھیں گے۔ اس کے بعد اس کی تجزی کریں گے۔ $a^2 - b^2$ کی صورت کے اجزائے ضربی معلوم کرنے کے بعد ہمیں ایک جزو ضربی $a^3 + b^3$ کی صورت میں اور دوسرا جزو ضربی $a^3 - b^3$ کی صورت میں حاصل ہوتا ہے۔ آخر میں ہم $a^3 + b^3$ اور $a^3 - b^3$ کی طرز کے اظہاریوں کے اجزائے ضربی معلوم کرتے ہیں۔

$$a^6 - 64b^6 = (a^3)^2 - (8b^3)^2$$
$$= (a^3 + 8b^3)(a^3 - 8b^3)$$
$$= \{(a)^3 + (2b)^3\}\{(a)^3 - (2b)^3\}$$
$$= [(a + 2b)\{(a)^2 - (a)(2b) + (2b)^2\}][(a - 2b)\{(a)^2 + (a)(2b) + (2b)^2\}]$$
$$= (a + 2b)(a^2 - 2ab + 4b^2)(a - 2b)(a^2 + 2ab + 4b^2)$$
$$= (a + 2b)(a - 2b)(a^2 - 2ab + 4b^2)(a^2 + 2ab + 4b^2)$$

دوسرا طریقہ:

$$a^6 - 64b^6 = (a^2)^3 - (4b^2)^3$$
$$= (a^2 - 4b^2)\{(a^2)^2 + (a^2)(4b^2) + (4b^2)^2]$$
$$= \{(a)^2 - (2b)^2\}[\{(a^2)^2 + (4b^2)^2 + 2(a^2)(4b^2)\} - (a^2)(4b^2)]$$

$$= (a+2b)(a-2b)\{(a^2+4b^2)^2 - 4a^2b^2\}$$
$$= (a+2b)(a-2b)\{(a^2+4b^2)^2 - (2ab)^2\}$$
$$= (a+2b)(a-2b)(a^2+4b^2+2ab)(a^2+4b^2-2ab)$$
$$= (a+2b)(a-2b)(a^2+2ab+4b^2)(a^2-2ab+4b^2)$$

مثال 3. $64r^6 - \frac{r^3}{s^3t^3}$ کے اجزائے ضربی معلوم کیجیے۔

حل: r^3 کو مشترک لینے سے $64r^6 - \frac{r^3}{s^3t^3} = r^3(64r^3 - \frac{1}{s^3t^3})$

$$= r^3\{(4r)^3 - (\frac{1}{st})^3\}$$
$$= r^3(4r - \frac{1}{st})\{(4r)^2 + (4r)(\frac{1}{st}) + (\frac{1}{st})^2\}$$
$$= r^3(4r - \frac{1}{st})(16r^2 + \frac{4r}{st} + \frac{1}{s^2t^2})$$

مشق 5.4

.1 اجزائے ضربی معلوم کیجیے۔

(i) $8a^3 + 27y^3$ (ii) $x^3y^6 + 8z^3$ (iii) $x^6 + 64t^3$

(iv) $2x^3 + 2y^6$ (v) $t^5 + t^2y^3$ (vi) $\frac{x^4y}{3} + \frac{xy^4}{81}$

.2 اجزائے ضربی معلوم کیجیے۔

(i) $x^3 - 64y^3$ (ii) $8x^3 - 27y^6$ (iii) $2x^3 - 250t^3$

(vi) $y^5 - y^2z^3$ (v) $\frac{a^4b}{81} - \frac{ab^4}{3}$ (vi) $a^3b^3c^3 - \frac{1}{a^3b^3c^3}$

.3 تجزی کیجیے۔

(i) $x^6 - y^6$ (ii) $x^6y^6 - \frac{64}{z^6}$ (iii) $x^{12} - y^{12}$

(iv) $x^6 + 64y^6$ (v) $a^6 + b^9y^9$ (vi) $ax^{12} + ay^{12}$

.4 مندرجہ ذیل کے اجزائے ضربی معلوم کیجیے۔

(i) $a^3 - a^2 + 2$ [اشارہ: $a^3 - a^2 + 2 = (a^3+1) - (a^2-1)$]

(ii) $x^3 - x - 2y + 8y^3$ (iii) $a^6 - 9a^3 + 8$ (iv) $8x^6 + 7x^3 - 1$

(v) $(x-2y)^3 - 64z^3$ (vi) $125r^3 - (s+at)^3$ (vii) $r^5t^2 + r^2t^8$

5.5 $a^3+b^3+c^3-3abc$ کی طرز کے اظہاریوں کی تجزی

ہم جانتے ہیں کہ

$$(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)=a^3+b^3+c^3-3abc$$

پس $a^3+b^3+c^3-3abc$ کے اجزائے ضربی $(a+b+c)$ اور $(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$ ہیں۔

مثال 1. $8a^3+b^3+27c^3-18abc$ کے اجزائے ضربی معلوم کیجیے۔

حل:

$$8a^3+b^3+27c^3-18abc=(2a)^3+(b)^3+(3c)^3-3(2a)(b)(3c)$$

$$=(2a+b+3c)\{(2a)^2+(b)^2+(3c)^2-(2a)(b)-(b)(3c)-(3c)(2a)\}$$

$$=(2a+b+3c)(4a^2+b^2+9c^2-2ab-3bc-6ca)$$

مثال 2. $x^3+\frac{1}{x^3}-y^3+3y$ کی تجزی کیجیے۔

حل:

$$x^3+\frac{1}{x^3}-y^3+3y$$

$$=(x)^3+(\frac{1}{x})^3+(-y)^3-3(x)(\frac{1}{x})(-y)\quad [\text{As } -3(x)(\frac{1}{x})(-y)=3y]$$

$$=(x+\frac{1}{x}-y)\{(x)^2+(\frac{1}{x})^2+(-y)^2-(x)(\frac{1}{x})-(\frac{1}{x})(-y)-(-y)(x)\}$$

$$=(x+\frac{1}{x}-y)(x^2+\frac{1}{x^2}+y^2-1+\frac{y}{x}+yx)$$

مشق 5.5

ذیل میں دیے گئے اظہاریوں کے اجزائے ضربی معلوم کیجیے۔

(1) $a^3-8b^3+27c^3+18abc$

(2) $a^6-27b^3-8c^6-18a^2bc^2$

(3) $27x^3-1+8y^6+18xy^2$

(4) $64y^6+\frac{64}{y^6}-8y^9+96y^3$

(5) $(x-y)^3+(y-z)^3+(z-x)^3-3(x-y)(y-z)(z-x)$

(6) $(x+y)^3-(y+z)^3+(z+x)^3+3(x+y)(y+z)(z+x)$

(7) $a^3-2+\frac{1}{a^3}$ [اشارہ: $a^3-2+\frac{1}{a^3}=a^3+1+\frac{1}{a^3}-3$]

(8) ثابت کیجیے کہ $x^3+y^3+z^3-3xyz$ کو ایسے بھی لکھ سکتے ہیں:

$$\frac{1}{2}(x+y+z)\{(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2\}$$

5.6 $a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)$ کی طرز کے اظہاریوں کی تجزی

ایسے اظہاریے جو $a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)$ کی طرح کے ہوں یعنی چکردار ترتیب میں ہوں، کے اجزائے ضربی بھی معلوم کیے جاسکتے ہیں۔ جس کی وضاحت مندرجہ ذیل مثالوں سے کی جاتی ہے۔

مثال 1. $a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)$ کے اجزائے ضربی معلوم کیجیے۔

حل: $a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)$

$$= a^2b - a^2c + b^2c - ab^2 + ac^2 - bc^2$$

[رقوم کو اس طرح ترتیب دیا کہ دیئے ہوئے اظہاریے کے اجزائے ضربی معلوم کیے جاسکیں]

$$= a^2b - ab^2 - a^2c + b^2c + ac^2 - bc^2$$
$$= ab(a-b) - c(a^2-b^2) + c^2(a-b)$$
$$= ab(a-b) - c(a-b)(a+b) + c^2(a-b)$$
$$= (a-b)\{ab - c(a+b) + c^2\}$$
$$= (a-b)(ab - ac - bc + c^2)$$
$$= (a-b)\{a(b-c) - c(b-c)\}$$
$$= (a-b)(b-c)(a-c)$$

مشق 5.6

مندرجہ ذیل کے اجزائے ضربی معلوم کیجیے۔

1. $x^2(y-z)+y^2(z-x)+z^2(x-y)$
2. $r^2(s-t)+s^2(t-r)+t^2(r-s)$
3. $a^4(b^2-c^2)+b^4(c^2-a^2)+c^4(a^2-b^2)$
4. $x^4(y^2-z^2)+y^4(z^2-x^2)+z^4(x^2-y^2)$
5. $4a^2(3b-4c)+9b^2(4c-2a)+16c^2(2a-3b)$
6. $x^2(3y-5z)+9y^2(5z-x)+25z^2(x-3y)$

5.7 مسئلہ باقی کے ذریعہ تجزی کرنا

اگر $p(x)$ ایک کثیر رقمی ہے تو اسے $(x-a)$ سے تقسیم کرنے پر ایک اور کثیر رقمی $q(x)$ بطور خارج قسمت (Quotient) اور باقی r حاصل ہوتا ہے۔

یعنی $p(x) = q(x) \times (x-a) + r$

جس میں r ایک مستقل ہے کیونکہ اس کا درجہ $(x-a)$ کے درجے سے کم ہے۔

اگر $x=a$ ہو تو: $p(a) = q(a) \times (a-a) + r$

$$= q(a) \times 0 + r$$
$$= r$$

مسئلہ باقی:

اگر کثیر رقتی $p(x)$ کو $(x-a)$ سے تقسیم کیا جائے تو باقی $p(a)$ حاصل ہوتا ہے۔

صریح نتیجہ:

اگر $p(a)$ صفر ہو تو $x-a$ کثیر رقتی $p(x)$ کا عاد یا جزو ضربی ہوتا ہے۔

دی گئی کثیر رقتی $p(x)$ کے جزو ضربی معلوم کرنے کے لیے مستقل رقم کے عاد کی مدد لی جاتی ہے۔ مسئلہ باقی کی مدد سے کثیر رقتی کی تجزی کرنے کی وضاحت مندرجہ ذیل مثالوں سے کی جاتی ہے۔

مثال 1. مسئلہ باقی استعمال کرتے ہوئے $x^3+8x^2+19x+12$ کی تجزی کیجیے۔

حل: فرض کیجیے: $p(x)=x^3+8x^2+19x+12$

12 کے عاد ہیں: $\pm1, \pm2, \pm3, \pm4, \pm6, \pm12$

اگر $x=-1$ تو: $p(-1)=(-1)^3+8(-1)^2+19(-1)+12$

$$=-1+8-19+12=20-20=0$$

اس لیے $p(x)$ کا ایک جزو ضربی $(x+1)$ ہے۔ اب $p(x)$ کو $(x+1)$ سے تقسیم کرتے ہیں۔

$$\begin{array}{r|l}
 & x^2+7x+12 \\
\hline
x+1 & x^3+8x^2+19x+12 \\
 & \underline{\pm x^3 \pm x^2} \\
 & 7x^2+19x+12 \\
 & \underline{\pm 7x^2 \pm 7x} \\
 & 12x+12 \\
 & \underline{\pm 12x \pm 12} \\
 & 0
\end{array}$$

اس طرح $p(x)=(x+1)(x^2+7x+12)$

$$=(x+1)(x^2+3x+4x+12)$$

$$=(x+1)[(x)(x+3)+4(x+3)]$$

$$=(x+1)(x+3)(x+4)$$

خیال رہے کہ کثیر رقتی کی مستقل رقم کے عاد $p(x)$ میں x کے بجائے رکھے جاتے ہیں۔ اب اگر $x=a$ رکھنے پر $p(x)$ صفر ہو جائے تو $p(x)$ کا ایک عاد یا جزو ضربی $(x-a)$ ہوتا ہے۔

مثال 1 میں مستقل رقم 12 ہے اور 12 کے عاد ہیں:

$$\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 6, \pm 12$$

$x = -1$ رکھنے پر باقی صفر بچتا ہے اس لیے $(x+1)$ دی ہوئی کثیر رقمی کا ایک جزو ضربی ہے۔

مثال 2. مسئلہ باقی کی مدد سے $x^3 - 10x^2 + 31x - 30$ کے اجزائے ضربی معلوم کیجیے۔

حل: فرض کیجیے: $p(x) = x^3 - 10x^2 + 31x - 30$

30 کے عاد ہیں: $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 5, \pm 6, \pm 10, \pm 15, \pm 30$

اگر $x = 1$ تو: $p(1) = (1)^3 - 10(1)^2 + 31(1) - 30$

$$= 1 - 10 + 31 - 30$$

$$= 32 - 40 = -8 \neq 0$$

اسی طرح اگر $x = -1$ تو $p(-1) \neq 0$

اگر $x = 2$ تو،

$$p(2) = (2)^3 - 10(2)^2 + 31(2) - 30$$

$$= 8 - 40 + 62 - 30$$

$$= 70 - 70 = 0$$

لہٰذا $p(x)$ کا ایک جزو ضربی $x - 2$ ہے۔

اب،

$$\begin{array}{r|l}
 & x^2 - 8x + 15 \\
\hline
x - 2 & x^3 - 10x^2 + 31x - 30 \\
 & \underline{\pm x^3 \mp 2x^2} \\
 & -8x^2 + 31x - 30 \\
 & \underline{\mp 8x^2 \pm 16x} \\
 & 15x - 30 \\
 & \underline{\pm 15x \mp 30} \\
 & 0
\end{array}$$

پس $p(x) = (x-2)(x^2 - 8x + 15)$

$$= (x-2)(x-3)(x-5)$$

مشق 5.7

مسئلہ باقی کے ذریعے مندرجہ ذیل کی تجزی کیجیے۔

1. x^3+x^2-2
2. $x^3+3x^2+4x-28$
3. $x^3-x^2-14x+24$
4. $x^3+7x^2+14x+8$
5. $x^3-21x+20$
6. x^3-4x^2+5x-2
7. x^3-7x+6
8. $x^3-5x+12$
9. $x^3-11x^2+36x-36$
10. x^6-7x^2+6 [$y=x^2$ رکھیں]

5.8 مشترک عادِ اعظم

مشترک عادِ اعظم کو بڑے سے بڑا مشترک جز و ضربی (Highest Common Factor) بھی کہا جاتا ہے۔ مشترک عادِ اعظم یا صرف عادِ اعظم دو یا دو سے زیادہ کثیر رقمیوں کے مشترک اجزائے ضربی کا حاصل ضرب ہوتا ہے۔ یہ ہر کثیر رقمی کو پورا پورا تقسیم کرتا ہے۔

مشترک عادِ اعظم معلوم کرنے کے مندرجہ ذیل دو طریقے ہیں۔

(i) اجزائے ضربی کا طریقہ (ii) تقسیم کا طریقہ

5.8.1 اجزائے ضربی کا طریقہ

مندرجہ ذیل مثالوں سے اس طریقہ کی وضاحت کی جاتی ہے۔

مثال 1. $8x^3y^2$ اور $12x^2y$ کا عادِ اعظم معلوم کیجیے۔

حل:

$$8x^3y^2 = 2\times2\times2\times x\times x\times x\times y\times y$$
$$12x^2y = 2\times2\times3\times x\times x\times y$$

یہاں مشترک اجزائے ضربی 2 , 2 , x , x اور y ہیں۔

اس لیے عادِ اعظم $= 2\times2\times x\times x\times y$

$$= 4x^2y$$

مثال 2. a^6-b^6 اور $a^4-2a^2b^2+b^4$ کا عادِ اعظم معلوم کیجیے۔

حل:

$$\begin{aligned}a^6-b^6 &= (a^3)^2-(b^3)^2\\ &= (a^3+b^3)(a^3-b^3)\\ &= (a+b)(a^2-ab+b^2)(a-b)(a^2+ab+b^2)\\ &= (a+b)(a-b)(a^2-ab+b^2)(a^2+ab+b^2)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}a^4-2a^2b^2+b^4 &= (a^2)^2-2(a^2)(b^2)+(b^2)^2\\ &= (a^2-b^2)^2\end{aligned}$$

$= [(a+b)(a-b)]^2 = (a+b)(a-b)(a+b)(a-b)$

یہاں مشترک اجزائے ضربی $(a+b)$ اور $(a-b)$ ہیں۔

اس لیے عادِ اعظم $= (a+b)(a-b)$

$= a^2 - b^2$

مثال 3. $4a^2+4ab-15b^2$ ، $2a^2+7ab-15b^2$ اور $6a^2+ab-15b^2$ کا عادِ اعظم معلوم کیجیے۔

حل: دی گئی کثیر رقموں کے اجزائے ضربی معلوم کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned} 4a^2+4ab-15b^2 &= 4a^2+10ab-6ab-15b^2 \\ &= 2a(2a+5b)-3b(2a+5b) \\ &= (2a-3b)(2a+5b) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2a^2+7ab-15b^2 &= 2a^2+10ab-3ab-15b^2 \\ &= 2a(a+5b)-3b(a+5b) \\ &= (2a-3b)(a+5b) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 6a^2+ab-15b^2 &= 6a^2-9ab+10ab-15b^2 \\ &= 3a(2a-3b)+5b(2a-3b) \\ &= (2a-3b)(3a+5b) \end{aligned}$$

تینوں کثیر رقمیوں میں $(2a-3b)$ مشترک ہے۔

پس عادِ اعظم $= 2a-3b$

مشق 5.8

مندرجہ ذیل کثیر رقمیوں کا عادِ اعظم اجزائے ضربی کے طریقے سے معلوم کیجیے۔

1. $5a^2b^3\ ,\ 60a^4c^2$
2. $111a^5b^3c^4\ ,\ 148a^8b^6c^2$
3. $x^3-y^3\ ,\ x^4-y^4$
4. $x^4+x^2y^2+y^4,\ x^6-y^6$
5. $2x^3-2x^2-4x+4\ ,\ x^3-1$
6. $2x^3-54\ ,\ 2x^4+18x^2+162$
7. $6x^3+24x^2+6x-36\ ,\ 4x^3-8x^2-20x+24$
8. $y^2+y-2,\ y^2+3y+2\ ,\ y^3+2y^2+y+2$
9. $12x^2-16xy+5y^2\ ,\ 30x^2+11xy-30y^2\ ,\ 6x^2+xy-5y^2$
10. $9x^2+63x+108\ ,\ 9x^2-45x-216\ ,\ 18x^2+45x-27$

5.8.2 تقسیم کا طریقہ

اس طریقے میں ہم بڑے درجے والی کثیر رقمی کو چھوٹے درجے والی کثیر رقمی سے تقسیم کرتے ہیں۔ کثیر رقمیوں کا عادِ اعظم بھی اعداد کے عادِ اعظم کی طرح معلوم کیا جاتا ہے۔

اس طریقے کی وضاحت ذیل کی مثالوں سے کی جاتی ہے۔

مثال 1. $x^3 - 6x^2 + 8x$ اور $x^2 + 3x - 28$ کا عادِ اعظم تقسیم کے طریقے سے معلوم کیجیے۔

حل: $x^3 - 6x^2 + 8x$ کا درجہ 3 ہے۔ جبکہ $x^2 + 3x - 28$ کا درجہ 2 ہے۔

اس لیے $x^3 - 6x^2 + 8x$ کو $x^2 + 3x - 28$ سے تقسیم کرتے ہیں۔

$$
\begin{array}{r|l}
 & x - 9 \\
\hline
x^2 + 3x - 28 & x^3 - 6x^2 + 8x \\
 & \underline{\underset{-}{+}x^3 \underset{-}{+} 3x^2 \underset{+}{-} 28x} \\
 & -9x^2 + 36x \\
 & \underline{\underset{+}{-}9x^2 \underset{+}{-} 27x \underset{-}{+} 252} \\
 & 63x - 252
\end{array}
$$

باقی $= 63(x - 4)$ یا

غور کیجیے کہ باقی کا درجہ مقسوم علیہ سے کم ہے۔

اب 63 کو نظر انداز کرتے ہوئے $x^2 + 3x - 28$ کو $x - 4$ سے تقسیم کیجیے۔

(63 بہر حال دی ہوئی کثیر رقمیوں کا مشترک جزو ضربی نہیں ہے)۔

$$
\begin{array}{r|l}
 & x + 7 \\
\hline
x - 4 & x^2 + 3x - 28 \\
 & \underline{\underset{-}{}x^2 \underset{+}{-} 4x} \\
 & 7x - 28 \\
 & \underline{\underset{-}{}7x \underset{+}{-} 28} \\
 & 0
\end{array}
$$

یعنی $x^2 + 3x - 28$ کو $x - 4$ پورا پورا تقسیم کرتا ہے۔

پڑتال: اب ہم یہ دیکھتے ہیں کہ $x^3 - 6x^2 + 8x$ کو بھی $x - 4$ تقسیم کرتا ہے۔

$$\begin{array}{r|l} & x^2 - 2x \\ \hline x-4 & x^3 - 6x^2 + 8x \\ & \underline{-x^3 \mp 4x^2} \\ & \quad -2x^2 + 8x \\ & \quad \underline{\mp 2x^2 \pm 8x} \\ & \qquad 0 \end{array}$$

پس مطلوبہ عادِ اعظم $= x - 4$

مثال 2. $6y^3 + 5y^2 - 34y + 15$ ، $6y^3 - 37y^2 + 57y - 20$ اور $3y^3 - 8y^2 - 31y + 60$ کا تقسیم کے طریقے سے عادِ اعظم معلوم کیجیے۔

حل: اگر تین کثیر رقمیوں کا عادِ اعظم معلوم کرنا ہے تو پہلے کسی دو کا عادِ اعظم معلوم کیجیے۔ پھر اس عادِ اعظم اور تیسری کثیر رقمی کا عادِ اعظم معلوم کیجیے جو تینوں کثیر رقمیوں کا عادِ اعظم ہوگا۔

پہلے $6y^3 + 5y^2 - 34y + 15$ اور $6y^3 - 37y^2 + 57y - 20$ کا عادِ اعظم معلوم کرتے ہیں۔

$$\begin{array}{r|l} & 1 \\ \hline 6y^3 - 37y^2 + 57y - 20 & 6y^3 + 5y^2 - 34y + 15 \\ & \underline{-6y^3 \mp 37y^2 \pm 57y \mp 20} \\ & \qquad 42y^2 - 91y + 35 \\ \text{یا} & \qquad 7(6y^2 - 13y + 5) \end{array}$$

اب

$$\begin{array}{r|l} & y - 4 \\ \hline 6y^2 - 13y + 5 & 6y^3 - 37y^2 + 57y - 20 \\ & \underline{\pm 6y^3 \mp 13y^2 \pm 5y} \\ & \quad -24y^2 + 52y - 20 \\ & \quad \underline{\mp 24y^2 \pm 52y \mp 20} \\ & \qquad 0 \end{array}$$

اس طرح ان کثیر رقمیوں کا عادِ اعظم $6y^2 - 13y + 5$ ہے۔

اب $3y^3 - 8y^2 - 31y + 60$ اور $6y^2 - 13y + 5$ کا عادِ اعظم معلوم کرتے ہیں۔

$$\begin{array}{r|l} & \frac{y}{2} - \frac{1}{4} \\ \hline 6y^2 - 13y + 5 & 3y^3 - 8y^2 - 31y + 60 \\ & \underline{-3y^3 \mp \frac{13}{2}y^2 \pm \frac{5}{2}y} \\ & \quad -\frac{3}{2}y^2 - \frac{67}{2}y + 60 \\ & \quad \underline{\mp \frac{3}{2}y^2 \pm \frac{13}{4}y \mp \frac{5}{4}} \\ & \qquad -\frac{147}{4}y + \frac{245}{4} \\ \text{یا} & \qquad -\frac{49}{4}(3y - 5) \end{array}$$

اب $6y^2 - 13y + 5$ کو $3y - 5$ سے تقسیم کرتے ہیں۔

$$\begin{array}{r|l} & 2y - 1 \\ \hline 3y - 5 & 6y^2 - 13y + 5 \\ & \pm 6y^2 \mp 10y \\ \hline & \quad\quad -3y + 5 \\ & \quad\quad \mp 3y \pm 5 \\ \hline & \quad\quad\quad 0 \end{array}$$

اس طرح دی ہوئی تینوں کثیر رقمیوں کا عاداعظم $(3y - 5)$ ہے۔

مشق 5.9

تقسیم کے طریقے سے مندرجہ ذیل کثیر رقمیوں کا عاداعظم معلوم کیجیے۔

1. $x^3 - y^3 , x^4 - y^4$
2. $x^3 - 1 , 2x^3 - 2x^2 - 4x + 4$
3. $x^2 + x - 2 , x^3 + 2x^2 + x + 2$
4. $(x + y)^2 , x^2 + 2xy + y^2$
5. $y^2 + y - 2 , y^2 + 3y + 2 , y^3 + 2y^2 + y + 2$
6. $x^2 + xy - 2y^2 , x^2 + 3xy + 2y^2 , x^3 + 2x^2y + xy^2 + 2y^3$
7. $x^3 - 8x^2 - 31x - 22 , x^3 - 4x^2 + x + 6 , 2x^3 + 9x^2 + 10x + 3$
8. $6x^2 + x - 5 , 12x^2 - 16x + 5 , 30x^2 + 11x - 30$
9. $a^2 - x^2 - y^2 - 2xy , y^2 - a^2 - x^2 - 2ax , x^2 - y^2 - a^2 - 2ay$

5.9 کثیر رقمیوں کا مشترک ذواضعاف اقل

اگر ایک کثیر رقمی دوسری سے پوری پوری تقسیم ہوتی ہو تو پہلی کثیر رقمی دوسری کی اضعاف کہلاتی ہے۔ مثلاً $x^2 + 4x + 4$ کو $(x + 2)$ پوری پوری تقسیم کرتی ہے اس لیے $x + 2$ کا اضعاف $x^2 + 4x + 4$ ہے۔

اگر ایک کثیر رقمی دو یا دو سے زیادہ کثیر رقمیوں سے پوری پوری تقسیم ہوتی ہو تو اسے دی ہوئی کثیر رقمیوں کا مشترک اضعاف کہتے ہیں۔

مثلاً $x^2 + 3x + 2$ ، $x + 1$ اور $x + 2$ دونوں سے پوری پوری تقسیم ہو جاتی ہے اس لیے $x + 1$ اور $x + 2$ کا مشترک اضعاف $x^2 + 3x + 2$ ہے۔

دی ہوئی کثیر رقمیوں کے بہت سے مشترک اضعاف ہو سکتے ہیں۔ ان مشترک اضعاف میں سے وہ کثیر رقمی جو سب سے کم درجہ کی ہو مشترک ذواضعاف اقل یا صرف ذواضعاف اقل کہلاتی ہے۔

دو یا زیادہ کثیر رقمیوں کا ذو اضعاف اقل معلوم کرنے کے مندرجہ ذیل دو طریقے ہیں۔

(i) تجزی کے ذریعے (ii) عادِ اعظم کے ذریعے

5.9.1 تجزی کے ذریعے

سب سے پہلے دی ہوئی کثیر رقمیوں کے اجزائے ضربی معلوم کرتے ہیں۔ پھر مشترک و غیر مشترک اجزائے ضربی کا حاصل ضرب لیتے ہیں۔ جو کثیر رقمیوں کا ذو اضعاف اقل کہلاتا ہے۔

اس طریقے کی وضاحت مندرجہ ذیل مثالوں سے کی جاتی ہے۔

مثال 1. $6a^3b^2c$ اور $8a^4b^3c^2$ کا ذو اضعاف اقل معلوم کیجیے۔

حل: سب سے پہلے دی ہوئی کثیر رقمیوں کے اجزائے ضربی معلوم کرتے ہیں۔

$$6a^3b^2c = 2 \times 3 \times a \times a \times a \times b \times b \times c$$

$$8a^4b^3c^2 = 2 \times 2 \times 2 \times a \times a \times a \times a \times b \times b \times b \times c \times c$$

اب مشترک اور غیر مشترک اجزائے ضربی لکھتے ہیں۔

مشترک اجزائے ضربی = $2 , a , a , a , b , b , c$

غیر مشترک اجزائے ضربی = $3 , 2 , 2 , a , b , c$

پس ذو اضعاف اقل = (مشترک اجزائے ضربی کا حاصل ضرب) × (غیر مشترک اجزائے ضربی کا حاصل ضرب)

$$= (12abc) \times (2a^3b^2c)$$

$$= 24a^4b^3c^2$$

واضح رہے کہ $6a^3b^2c$ اور $8a^4b^3c^2$ کا عادِ اعظم $2a^3b^2c$ ہے اور $24a^4b^3c^2$ ذو اضعاف اقل ہے۔

عادِ اعظم × ذو اضعاف اقل = $(2a^3b^2c) \times (24a^4b^3c^2) = 48a^7b^5c^3$

دی ہوئی کثیر رقمیوں کا حاصل ضرب = $8a^4b^3c^2 \times 6a^3b^2c = 48a^7b^5c^3$

اس طرح یہ مشاہدہ ہمیں ایک اور نتیجہ فراہم کرتا ہے۔

عادِ اعظم × ذو اضعاف اقل = (پہلی کثیر رقمی) × (دوسری کثیر رقمی)

مثال 2. $x^2 + x - 6$ ، $2x^2 + 9x + 9$ اور $x^2 + 7x + 12$ کا ذو اضعاف اقل معلوم کیجیے۔

حل:

$$x^2 + x - 6 = (x - 2)(x + 3)$$

$$2x^2 + 9x + 9 = (x + 3)(2x + 3)$$

$$x^2 + 7x + 12 = (x + 3)(x + 4)$$

مشترک اجزائے ضربی : $x + 3$

غیر مشترک اجزائے ضربی : $x - 2$, $2x + 3$, $x + 4$

پس مطلوبہ ذواضعاف اقل = $(x + 3)(x - 2)(2x + 3)(x + 4)$

5.9.2 عادِ اعظم کے ذریعے

چونکہ عادِ اعظم × ذواضعاف اقل = (پہلی کثیر رقمی) × (دوسری کثیر رقمی)

لہٰذا ذواضعاف اقل = $\dfrac{\text{(پہلی کثیر رقمی)} \times \text{(دوسری کثیر رقمی)}}{\text{عادِ اعظم}}$

واضح رہے کہ مندرجہ بالا نتیجہ صرف دو کثیر رقمیوں کے لیے ہے۔

یہ بھی یاد رہے کہ

ذواضعاف اقل = (مشترک اجزائے ضربی کا حاصل ضرب) × (غیر مشترک اجزائے ضربی کا حاصل ضرب)

مثال 1. کثیر رقمیوں $2x^4 + 3x^3 - 13x^2 - 7x + 15$ اور $2x^4 + x^3 - 20x^2 - 7x + 24$ کا ذواضعاف اقل معلوم کیجیے۔

حل: پہلے دی ہوئی کثیر رقمیوں کا عادِ اعظم بذریعہ تقسیم معلوم کرتے ہیں۔

$$2x^4 + x^3 - 20x^2 - 7x + 24 \;\big)\; 2x^4 + 3x^3 - 13x^2 - 7x + 15 \;(\; 1$$
$$\underline{\pm 2x^4 \pm x^3 \mp 20x^2 \mp 7x \pm 24}$$
$$2x^3 + 7x^2 - 9$$

$$2x^3 + 7x^2 - 9 \;\big)\; 2x^4 + x^3 - 20x^2 - 7x + 24 \;(\; x - 3$$
$$\underline{\pm 2x^4 \pm 7x^3 \qquad \mp 9x}$$
$$-6x^3 - 20x^2 + 2x + 24$$
$$\underline{\mp 6x^3 \mp 21x^2 \qquad \pm 27}$$
$$x^2 + 2x - 3$$

اب

$$x^2 + 2x - 3 \;\big)\; 2x^3 + 7x^2 - 9 \;(\; 2x + 3$$
$$\underline{\pm 2x^3 \pm 4x^2 \mp 6x}$$
$$3x^2 + 6x - 9$$
$$\underline{\pm 3x^2 \pm 6x \mp 9}$$
$$0$$

لہٰذا عادِ اعظم = $x^2 + 2x - 3$

پس ذواضعاف اقل $= \dfrac{(2x^4+3x^3-13x^2-7x+15)\ (2x^4+x^3-20x^2-7x+24)}{(x^2+2x-3)}$

$$= \frac{(x^2+2x-3)\ (2x^2-x-5)\ (2x^4+x^3-20x^2-7x+24)}{(x^2+2x-3)}$$

$$= (2x^4+x^3-20x^2-7x+24)\ (2x^2-x-5)$$

نوٹ: اگر $2x^4+x^3-20x^2-7x+24$ کو (x^2+2x-3) سے تقسیم کیا جائے۔ تو $(2x^2-3x-8)$ حاصل ہوتا ہے۔

اس طرح

$(2x^4+3x^3-13x^2-7x+15)\ (2x^2-3x-8)$ مطلوبہ ذواضعاف اقل ہے۔

دونوں طرح سے حاصل ہونے والے ذواضعاف اقل کو مختصر کرنے سے ایک ہی جواب آئے گا۔

مثال 2. اگر دو کثیر رقمیوں کے عادِ اعظم اور ذواضعاف اقل بالترتیب $(x-3)$ اور $x^3-9x^2+26x-24$ ہوں اور ایک کثیر رقمی x^2-5x+6 ہو تو دوسری معلوم کیجیے۔

حل: عادِ اعظم $= x-3$

ذواضعاف اقل $= x^3-9x^2+26x-24$

پہلی کثیر رقمی $= x^2-5x+6$

دوسری کثیر رقمی $= B(x)$

ہم جانتے ہیں کہ

$$\text{دوسری کثیر رقمی} = \frac{\text{ذواضعاف اقل} \times \text{عادِ اعظم}}{\text{پہلی کثیر رقمی}}$$

$$B(x) = \frac{(x-3)\ (x^3-9x^2+26x-24)}{x^2-5x+6}$$

$$= \frac{(x-3)\ (x^3-9x^2+26x-24)}{(x-2)\ (x-3)}$$

$$= \frac{x^3-9x^2+26x-24}{x-2}$$

اب،

$$
\begin{array}{r|l}
 & x^2 - 7x + 12 \\
\hline
x - 2 & x^3 - 9x^2 + 26x - 24 \\
 & \underline{\mp x^3 \pm 2x^2} \\
 & -7x^2 + 26x - 24 \\
 & \underline{\mp 7x^2 \pm 14x} \\
 & 12x - 24 \\
 & \underline{\pm 12x \mp 24} \\
 & 0
\end{array}
$$

پس دوسری کثیررقمی $= x^2 - 7x + 12$

مشق 5.10

مندرجہ ذیل کثیررقمیوں کا تجزی کے ذریعے ذواضعاف اقل معلوم کیجیے۔

1. $15a^2x^3y^2\ ,\ 16a^2x^2y^3\ ,\ 12a^2x^3y^2$
2. $x^2 - y^2 - z^2 - 2yz,\ y^2 - z^2 - x^2 - 2xz$
3. $x^3 + 6x^2 + 11x + 6,\ x^3 - x^2 + 24x + 26$
4. $a^3 - b^3\ ,\ a^6 + b^6\ ,\ a^{12} - b^{12}$
5. $6x^2 + 11x + 3,\ 2x^2 - 5x - 12\ ,\ 3x^2 - 11x - 4$
6. $x - y,\ x^2 - y^2\ ,\ x^3 - y^3\ ,\ x^4 + x^2y^2 + y^4$

عاد اعظم کی مدد سے مندرجہ ذیل کثیررقمیوں کا ذواضعاف اقل معلوم کیجیے۔

7. $4x^3 + 8x^2 - 3x - 9\ ,\ 12x^3 + 28x^2 + 13x - 3$
8. $x^4 - 15x + 14\ ,\ x^4 - 22x + 21$
9. $3x^3 + 9x^2 - 84x\ ,\ 4x^4 - 24x^3 + 32x^2$
10. $1 - x^2 - x^4 + x^5\ ,\ 1 + 2x + x^2 - x^4 - x^5$

سوالات 11 تا 13 میں دوسری کثیررقمی معلوم کیجیے جبکہ۔

11. پہلی کثیررقمی $x^2 - 5x + 6$ ہے۔ عاد اعظم اور ذواضعاف اقل بالترتیب $(x - 3)$ اور $x^3 - 9x^2 + 26x - 24$ ہیں۔
12. پہلی کثیررقمی $= x^2 - 5x - 14$ ، عاد اعظم $= x - 7$ اور ذواضعاف اقل $= x^3 - 10x^2 + 11x + 70$
13. پہلی کثیررقمی $= 3x^2 + 14x + 8$ ، عاد اعظم $= 3x + 2$ اور ذواضعاف اقل $= 6x^3 + 25x^2 + 2x - 8$
14. اگر دو کثیررقمیوں کا جن کا درجہ دو ہو، عاد اعظم اور ذواضعاف اقل بالترتیب $3x - 2$ اور $3x^3 + 7x^2 - 4$ ہو تو دونوں کثیررقمیاں معلوم کیجیے۔
15. دوسہ درجی کثیررقمیوں کا عاد اعظم اور ذواضعاف اقل بالترتیب $x^2 + x + 5$ اور $x^4 + 2x^3 + 4x^2 + 3x - 10$ ہو تو دونوں کثیررقمیاں معلوم کیجیے۔

5.10 الجبری کسور کو مختصر کرنا

$\frac{P}{Q}$ طرز کا اظہاریہ الجبری کسر کہلاتا ہے۔ جبکہ P اور Q الجبری اظہاریے ہوں۔

اور $Q \neq 0$

ہر ناطق اظہاریہ الجبری کسر ہے لیکن اس کا معکوس صحیح نہیں ہے۔

5.10.1 مترادف کسور

ہم جانتے ہیں کہ $\frac{1}{2}, \frac{2}{4}, \frac{3}{6}, \ldots$ مترادف کسور ہیں۔

اسی طرح $\frac{p(x)}{q(x)}, \frac{p(x)\ r(x)}{q(x)\ r(x)}, \frac{p(x)\ s(x)}{q(x)\ s(x)}, \ldots$ مترادف کسور ہیں۔

مثلاً $\frac{1}{x-1}, \frac{x+1}{x^2-1}, \frac{x^2+x+1}{x^3-1}$ مترادف کسور ہیں۔

نوٹ: کسور کی مختصر کرنے سے مراد دی ہوئی کسر کے مترادف ایسی کسر معلوم کرنا ہے جس کے مخرج کا درجہ کم سے کم ہو۔

مثال 1. مختصر کیجیے: $\frac{a^5b-ab^5}{a^3b+ab^3}$

حل:

$$\frac{a^5b-ab^5}{a^3b+ab^3} = \frac{ab(a^4-b^4)}{ab(a^2+b^2)}$$

$$= \frac{(a^2+b^2)(a^2-b^2)}{(a^2+b^2)} = (a^2-b^2)$$

5.10.2 الجبری کسور کی جمع اور تفریق

اس طرح کے سوالوں کو حل کرنے کا آسان طریقہ یہ ہے کہ ان کے مخرجوں کا ذو اضعاف اقل لے لیا جائے۔ مندرجہ ذیل مثالوں سے اس کی وضاحت کیجاتی ہے۔

مثال 1. مختصر کیجیے: $\frac{2ab}{a^3-b^3} + \frac{2a}{a^2+ab+b^2}$

حل:

$$\frac{2ab}{a^3-b^3} + \frac{2a}{a^2+ab+b^2} = \frac{2ab}{(a-b)(a^2+ab+b^2)} + \frac{2a}{(a^2+ab+b^2)}$$

$$= \frac{2ab+2a(a-b)}{(a-b)(a^2+ab+b^2)}$$

$$= \frac{2ab+2a^2-2ab}{(a-b)(a^2+ab+b^2)}$$

پس

$$\frac{2ab}{a^3-b^3} + \frac{2a}{a^2+ab+b^2} = \frac{2a^2}{(a-b)(a^2+ab+b^2)}$$

مثال 2. مختصر کیجیے: $\dfrac{x+2}{x^2+4x+3}-\dfrac{2x-6}{x^2-x-2}+\dfrac{x-1}{x^2+x-6}$

حل: پہلے ہر مخرج کے اجزائے ضربی معلوم کرتے ہیں۔

$$x^2+4x+3 = x^2+x+3x+3$$
$$= x(x+1)+3(x+1)$$
$$= (x+1)(x+3)$$
$$x^2-x-2 = x^2-2x+x-2$$
$$= x(x-2)+1(x-2) = (x-2)(x+1)$$
$$x^2+x-6 = x^2+3x-2x-6$$
$$= x(x+3)-2(x+3) = (x+3)(x-2)$$

پس مخرجوں کا ذواضعاف اقل $= (x+1)(x+3)(x-2)$

$$\frac{x+2}{x^2+4x+3}-\frac{2x-6}{x^2-x-2}+\frac{x-1}{x^2+x-6}=\frac{x+2}{(x+1)(x+3)}-\frac{2(x-3)}{(x+1)(x-2)}+\frac{x-1}{(x+3)(x-2)}$$
$$=\frac{(x+2)(x-2)-2(x-3)(x+3)+(x-1)(x+1)}{(x+1)(x+3)(x-2)}$$
$$=\frac{x^2-4-2x^2+18+x^2-1}{(x+1)(x+3)(x-2)}$$
$$=\frac{2x^2-2x^2-5+18}{(x+1)(x+3)(x-2)}$$
$$=\frac{13}{(x+1)(x+3)(x-2)}$$

5.10.3 الجبری کسور کی ضرب

اگر P, Q, R اور S کثیر رقمیاں ہیں جبکہ Q اور S صفر نہیں ہیں تو

$$\frac{P}{Q}\times\frac{R}{S}=\frac{PR}{QS}$$

جبکہ $\dfrac{PR}{QS}$ کو مختصر ترین صورت میں ظاہر کیا جاسکتا ہے۔

مثال 1. $\dfrac{b^2-6b+9}{b^3+2b}$ اور $\dfrac{ab^2+2a}{ab-6+2b-3a}$ کو ضرب دیجیے جبکہ

$$\forall\, a,b : ab-6+2b-3a\neq 0 \text{ اور } b^3+2b\neq 0$$

حل:
$$\frac{ab^2+2a}{ab-6+2b-3a}\times\frac{b^2-6b+9}{b^3+2b}=\frac{a(b^2+2)}{ab+2b-3a-6}\times\frac{(b-3)^2}{b(b^2+2)}$$

$$= \frac{a(b^2+2)}{b(a+2)-3(a+2)} \times \frac{(b-3)^2}{b(b^2+2)}$$

$$= \frac{a(b^2+2)}{(a+2)(b-3)} \times \frac{(b-3)^2}{b(b^2+2)}$$

$$= \frac{a(b^2+2)(b-3)^2}{(a+2)(b-3)(b^2+2)b} = \frac{a(b-3)}{b(a+2)}$$

5.10.4 الجبری کسور کی تقسیم

فرض کیجیے P, Q, R اور S غیر صفر کثیر رقمیاں ہیں۔ تو ایک الجبری کسر $\frac{P}{Q}$ کو $\frac{R}{S}$ سے تقسیم کا مطلب ہے کہ $\frac{P}{Q}$ کو $\frac{R}{S}$ کے ضربی معکوس سے ضرب دیا جائے یعنی $\frac{S}{R}$ سے۔

پس $\quad \frac{P}{Q} \div \frac{R}{S} = \frac{P}{Q} \times \frac{S}{R}$

اس کی وضاحت مندرجہ ذیل مثالوں سے کی جاتی ہے۔

مثال 1. مختصر کیجیے: $\quad \frac{y^2}{x^2-5x+6} \div \frac{xy}{x^2y-2xy}$

حل:

$$\frac{y^2}{x^2-5x+6} \div \frac{xy}{x^2y-2xy} = \frac{y^2}{x^2-5x+6} \times \frac{x^2y-2xy}{xy}$$

$$= \frac{y^2}{(x-2)(x-3)} \times \frac{xy(x-2)}{xy}$$

$$= \frac{y^2}{x-3}$$

مثال 2. مختصر کیجیے: $\quad \left(\frac{a+b}{a-b} + \frac{a-b}{a+b}\right) \div \left(\frac{a-b}{a+b} - \frac{a+b}{a-b}\right)$

حل:

$$\left(\frac{a+b}{a-b} + \frac{a-b}{a+b}\right) \div \left(\frac{a-b}{a+b} - \frac{a+b}{a-b}\right) = \frac{(a+b)^2+(a-b)^2}{(a-b)\times(a+b)} \div \frac{(a-b)^2-(a+b)^2}{(a+b)\times(a-b)}$$

$$= \frac{(a+b)^2+(a-b)^2}{(a-b)(a+b)} \times \frac{(a+b)(a-b)}{(a-b)^2-(a+b)^2}$$

$$= \frac{2(a^2+b^2)(a+b)(a-b)}{(a-b)(a+b)\quad(-4ab)}$$

$$= -\frac{a^2+b^2}{2ab}$$

الجبری کسور میں بعض اوقات قوسین استعمال کیے جاتے ہیں۔ ان قوسین کو مختصر کرنے کا وہی طریقہ ہے جو اعداد میں ہوتا ہے۔

مشق 5.11

مختصر کیجیے۔

1. $\dfrac{a^3-8a^2+11a+20}{a^3-6a^2-7a+60}$, $\forall\ a : a^3-6a^2-7a+60 \neq 0$

2. $\dfrac{4}{a^2-4a-5}+\dfrac{8}{a^2-1}$, $\forall\ a : a^2-4a-5 \neq 0$, $a \neq \pm 1$

3. $\dfrac{b^2+2}{b^3-8}+\dfrac{9}{b-2}$, $\forall\ b : b \neq 2$

4. $\dfrac{4xy}{x^3+y^3}-\dfrac{x}{x^2-xy+y^2}$, $\forall\ x, y : x^3+y^3 , x^2-xy+y^2 \neq 0$

5. $\dfrac{1}{4a^2-b^2}-\dfrac{1}{2a-b}+\dfrac{1}{2a+b}$, $\forall\ a, b : 4a^2-b^2 , 2a-b, 2a+b \neq 0$

6. $\dfrac{x^2}{(x-y)(y-z)}+\dfrac{y^2}{(z-x)(x-y)}+\dfrac{z^2}{(y-z)(z-x)}$, $\forall\ x, y, z : x-y, y-z, z-x \neq 0$

7. $\dfrac{3}{x+6}+\dfrac{4}{x+3}-\dfrac{3}{x+2}+\dfrac{4}{x+5}$, $\forall\ x \neq -6, -3, -2, -5$

8. $\dfrac{x^2(y-z)}{(x+y)(x+z)}-\dfrac{y^2(z-x)}{(y+z)(y+x)}+\dfrac{z^2(x-y)}{(z+x)(z+y)}$, $\forall\ x, y, z : x+y,\ y+z, z+x \neq 0$

9. $\dfrac{x^2-(2y-3z)^2}{(x+3z)^2-4y^2}-\dfrac{4y^2-(x-3z)^2}{(x+2y)^2-9z^2}+\dfrac{(x-2y)^2-9z^2}{(2y+3z)^2-x^2}$

$\forall\ x, y, z : (x+3z)^2-4y^2, (x+2y)^2-9z^2, (2y+3z)^2-x^2 \neq 0$

.10 مختصر کیجیے:

(i) $\dfrac{(a+b)^2-3ab}{2(a-b)^2+4ab} \times \dfrac{(a+b)^2+(a-b)^2}{a^3+b^3}$ (Denominator $\neq 0$)

(ii) $\dfrac{y^2+y+1}{y+1} \times \dfrac{y-1}{y+1}y \times \dfrac{y^2-1}{y^3-1}$ (Denominator $\neq 0$)

(iii) $\dfrac{x^2+xy}{y^2+xy} \times \dfrac{y^2-xy}{x^2-xy} \times \dfrac{2}{x^2-y^2}$ (Denominator $\neq 0$)

(iv) $\dfrac{x^2-y^2}{x^3+y^3} \times \dfrac{(x-y)^2+xy}{x^2-xy} \times \dfrac{x^3+xy^2}{(x+2y)^2-2xy}$ (Denominator $\neq 0$)

(v) $\left(\dfrac{2x+y}{2x-y} + \dfrac{2x-y}{2x+y}\right) \div \left(\dfrac{2x-y}{2x+y} + \dfrac{2x+y}{2x-y}\right)$ (Denominator $\neq 0$)

(vi) $\dfrac{2y^2-2yz}{4yz} \times \left(\dfrac{y-z}{y+z}-1\right)$ (Denominator $\neq 0$)

.11 مختصر کیجیے:

(i) $\dfrac{x+2y}{x^2-xy} \div \dfrac{x^2+4xy+3y^2}{x(x^2-y^2)}$ (Denominator $\neq 0$)

(ii) $\dfrac{a^2+ab}{a^2-ab} \div \dfrac{a^2+ab+b^2}{a^3-b^3}$ (Denominator $\neq 0$)

(iii) $\dfrac{a^2-b^2}{a^3-b^3} \times \dfrac{(a-b)^2 \times ab}{(a+b)^2-4ab} \div \dfrac{a^3b-ab^3}{a^3-b^3}$ (Denominator $\neq 0$)

(iv) $\dfrac{x^2-2x+4}{x-4} \div \dfrac{x^3+4x^2-5x}{x-2x+1} \times \dfrac{x^2+x-2}{x(x^3+8)}$ (Denominator $\neq 0$)

.12 مختصر کیجیے:

(i) $\left[\dfrac{a^2-b^2}{a^3+b^3} \times \dfrac{(a-b)^2+ab}{(a+2b)^2-2ab}\right] \div \left(\dfrac{a^2-ab}{a^3-8b^3}\right)$ (Denominator $\neq 0$)

(ii) $\left(\dfrac{x+5}{x^2-2x+4} \div \dfrac{x^2-2x+1}{x^3+4x^2-5x}\right) \times \dfrac{x^4+8x}{x^2+x-2}$ (Denominator $\neq 0$)

(iii) $\dfrac{4x^2-4xy}{2xy} \div \left[\left(1-\dfrac{x-y}{x+y}\right) \div \left(1+\dfrac{x-y}{x+y}\right)\right]$ (Denominator $\neq 0$)

5.11 الجبری کسور کا اختصار جس میں چاروں بنیادی عوامل ہوں

ایسے سوالوں کو حل کرنے کے لیے جن میں چاروں بنیادی عوامل ہوں۔ عوامل کو مندرجہ ذیل ترتیب میں حل کرتے ہیں۔

(i) تقسیم $(\div)$

(ii) ضرب $(\times)$

(iii) جمع $(+)$

(iv) تفریق $(-)$

اس کی وضاحت مندرجہ ذیل مثال سے کی جاتی ہے۔

مثال 1. مختصر کیجیے:

$$\frac{x^4-y^4}{x^2+2xy+y^2}+\frac{x-y}{x(x+y)}\div\frac{x^2+y^2}{x}$$

حل:

$$\frac{x^4-y^4}{x^2+2xy+y^2}+\frac{x-y}{x(x+y)}\div\frac{x^2+y^2}{x}=\frac{(x+y)(x-y)(x^2+y^2)}{(x+y)^2}+\frac{(x-y)}{x(x+y)}\times\frac{x}{x^2+y^2}$$

$$=\frac{(x-y)(x^2+y^2)}{(x+y)}+\frac{(x-y)}{(x+y)(x^2+y^2)}$$

$$=\frac{(x-y)(x^2+y^2)^2+(x-y)}{(x+y)(x^2+y^2)}$$

$$=\frac{(x-y)\{(x^2+y^2)^2+1\}}{(x+y)(x^2+y^2)}$$

$$=\frac{(x-y)\{(x^4+y^4+2x^2y^2)+1\}}{(x+y)(x^2+y^2)}$$

$$=\frac{(x-y)(x^4+y^4+2x^2y^2+1)}{(x+y)(x^2+y^2)}$$

مشق 5.12

مندرجہ ذیل الجبری کسور کو مختصر کیجیے:

1. $\left(\frac{x^2+xy+y^2}{x^2-xy+y^2}+\frac{x+y}{x-y}\right)\div\left(\frac{x^2+xy+y^2}{x^2-xy+y^2}-\frac{x+y}{x-y}\right)$

2. $\left[\frac{(x+y)^2}{(x+3y)^2}-\frac{(x-y)^2}{(x+3y)^2}\right]\div\frac{4xy}{x+3y}-\left(\frac{x}{x-y}\times\frac{y}{x+3y}\right)\div\frac{xy}{x-y}$

3. $\left[\frac{3+6x+12x^2}{3-3x}\div\frac{(1-2x)}{1-8x^3}\right]-\left[\frac{(1+6x)^2}{1-5x+6x^2}\times\frac{1-5x+6x^2}{1+6x}\right]$

4. $\left\{\left(\frac{1}{y^4+1}+\frac{1}{y^2-1}\right)\div\left(\frac{1}{y^2+1}+\frac{y^6}{y^2-1}\right)\right\}\times\frac{y^8+y^6+y^2-1}{2y^2}$

5. $[\{(x+y)+(x-y)\}\div\{(x+y)-(x-y)\}]\times\frac{2xy(x-y)}{x^2-y^2}$

5.12 الجبری اظہاریوں کا جذر المربع

سابقہ جماعتوں میں آپ کامل مربع اعداد اور ناطق اعداد کے جذر نکالنے کا طریقہ سیکھ چکے ہیں۔ اب الجبری اظہاریے کا جذر نکالنے کا طریقہ سیکھتے ہیں۔

الجبری اظہاریوں کا جذر المربع دو طریقوں سے معلوم کیا جا سکتا ہے۔

(i) بذریعہ اجزائے ضربی (ii) بذریعہ تقسیم

5.12.1 جذر المربع بذریعہ اجزائے ضربی

اس طریقہ کی وضاحت مندرجہ ذیل مثالوں سے کی جاتی ہے۔

مثال 1. اجزائے ضربی کا طریقہ استعمال کرتے ہوئے $64a^4 - 112a^2b^2 + 49b^4$ کا جذر معلوم کیجیے۔

حل:

$$64a^4 - 112a^2b^2 + 49b^4 = (8a^2)^2 - 2(8a^2)(7b^2) + (7b^2)^2$$
$$= (8a^2 - 7b^2)^2$$

اس لیے مطلوبہ جذر $= 8a^2 - 7b^2$

مثال 2. $(y^2 - 9y + 20)(y^2 - 11y + 30)(y^2 - 10y + 24)$ کا جذر معلوم کیجیے۔

حل:

$$y^2 - 9y + 20 = (y-4)(y-5)$$
$$y^2 - 11y + 30 = (y-5)(y-6)$$
$$y^2 - 10y + 24 = (y-4)(y-6)$$
$$(y^2 - 9y + 20)(y^2 - 11y + 30)(y^2 - 10y + 24) = (y-4)(y-5)(y-5)(y-6)(y-4)(y-6)$$
$$= (y-4)^2(y-5)^2(y-6)^2$$
$$= [(y-4)(y-5)(y-6)]^2$$

پس مطلوبہ جذر $= (y-4)(y-5)(y-6)$

مثال 3. $\left(x+\frac{1}{x}\right)^2 - 4\left(x-\frac{1}{x}\right)$ کا جذر نکالیے۔

حل:

$$\left(x+\frac{1}{x}\right)^2 - 4\left(x-\frac{1}{x}\right) = \left\{\left(x-\frac{1}{x}\right)^2 + 4\right\} - 4\left(x-\frac{1}{x}\right)$$
$$= \left(x-\frac{1}{x}\right)^2 - 4\left(x-\frac{1}{x}\right) + 4$$
$$= \left(x-\frac{1}{x}\right)^2 - 2\left(x-\frac{1}{x}\right)(2) + (2)^2$$
$$= \left\{\left(x-\frac{1}{x}\right) - 2\right\}^2$$
$$= \left(x-\frac{1}{x}-2\right)^2 = \left(x-2-\frac{1}{x}\right)^2$$

پس مطلوبہ جذر $= x - 2 - \frac{1}{x}$

یا

$$\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-4\left(x-\frac{1}{x}\right) = x^2+2+\frac{1}{x^2}-4x+\frac{4}{x}$$

$$= x^2+\frac{1}{x^2}+4-2+\frac{4}{x}-4x$$

$$= (x^2)+\left(-\frac{1}{x}\right)^2+(-2)^2+2(x)\left(-\frac{1}{x}\right)+2\left(-\frac{1}{x}\right)(-2)+2(-2)(x)$$

کیونکہ $(a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca$

لہٰذا

$$\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-4\left(x-\frac{1}{x}\right) = \left(x-\frac{1}{x}-2\right)^2$$

$$= \left(x-2-\frac{1}{x}\right)^2$$

پس مطلوبہ جذر $= x-2-\frac{1}{x}$

مشق 5.13

بذریعہ اجزائے ضربی مندرجہ ذیل اظہاریوں کا جذر معلوم کیجیے:

1. $25x^6+20x^3y^2+4y^4$
2. $49(x+2y)^2-28(x+2y)z^2+4z^4$
3. $\frac{4x^4}{y^4}-4+\frac{y^4}{x^4}$
4. $\frac{x^4y^6}{9}+\frac{8x^3}{3}+\frac{16x}{y^6}$
5. $\left(a^2+\frac{1}{a^2}\right)-4\left(a-\frac{1}{a}\right)+2$
6. $\left(y^2+\frac{1}{y^2}\right)-10\left(y-\frac{1}{y}\right)+23$
7. $\left(y+\frac{1}{y}\right)^2-4\left(y-\frac{1}{y}\right)$
8. $\left(y^4+\frac{1}{y^4}\right)+2\left(y^2+\frac{1}{y^2}\right)+3$
9. $(y^2-9y+20)(y^2-8y+15)(y^2-7y+12)$
10. $(x^4+y^4)^2-(x^4-y^4)^2$
11. $(x^2+x-20)(x^2+13x+40)(x^2+4x-32)$
12. $x^2+\frac{y^2}{16}+z^2+\frac{xy}{2}-2xz-\frac{yz}{2}$
13. $\frac{y^4}{x^4}+\frac{x^4}{y^4}+3+\frac{2y^2}{x^2}+\frac{2x^2}{y^2}$
14. $\frac{x^6}{y^6}+\frac{y^6}{x^6}+3+\frac{2y^3}{x^3}+\frac{2x^3}{y^3}$

5.12.2 جذرالمربع بذریعہ تقسیم

کسی الجبری اظہاریے کا جذر نکالنا ہو تو بعض اظہاریے آسانی سے کامل مربع میں تبدیل ہو جاتے ہیں۔ بعض ایسے پیچیدہ ہوتے ہیں کہ کامل مربع کی شکل میں آسانی سے تبدیل نہیں ہو پاتے۔ ایسی صورت میں جذر معلوم کرنے کے لیے طریقہ تقسیم استعمال کیا جاتا ہے۔ اس طریقہ کی وضاحت مندرجہ ذیل مثالوں سے کی جاتی ہے۔

مثال 1. $4a^4 + 8a^3 + 8a^2 + 4a + 1$ کا جذر تقسیم کے طریقے سے معلوم کیجیے۔

حل:

$$2a^2 + 2a + 1$$

$2a^2$ $+2a^2$	$4a^4 + 8a^3 + 8a^2 + 4a + 1$ $\underline{-4a^4}$
$4a^2 + 2a$ $+2a$	$8a^3 + 8a^2 + 4a + 1$ $\underline{-8a^3 \pm 4a^2}$
$4a^2 + 4a + 1$ $+1$	$4a^2 + 4a + 1$ $\underline{-4a^2 \pm 4a \pm 1}$
$4a^2 + 4a + 2$	0

اس طرح مطلوبہ جذر $= 2a^2 + 2a + 1$

وضاحت:

پہلا مرحلہ: $\sqrt{4a^4} = 2a^2$ جو مطلوبہ جذر کی پہلی رقم ہے۔

دوسرا مرحلہ: جذر کی پہلی رقم کا مربع دیئے ہوئے اظہاریے سے تفریق کیا۔ اس طرح باقی $8a^3 + 8a^2 + 4a + 1$ بچا۔ $2a^2$ کو $2a^2$ میں جمع کرنے پر $4a^2$ حاصل ہوا جو نئے مقسوم علیہ کی پہلی رقم ہے۔

تیسرا مرحلہ: باقی کی پہلی رقم $8a^3$ کو $4a^2$ سے تقسیم کرنے پر $2a$ حاصل ہوا جو مطلوبہ جذر کی دوسری رقم ہے۔ $2a$ کو مطلوبہ جذر کی پہلی رقم میں جمع کیا۔ $2a$ کو نئے مقسوم علیہ میں جمع کرنے پر $4a^2 + 2a$ حاصل ہوا۔

چوتھا مرحلہ: $4a^2 + 2a$ اور $2a$ کے حاصل ضرب کو باقی میں سے تفریق کیا تو دوسرا باقی $4a^2 + 4a + 1$ بچا۔ جذر کی دوسری رقم $2a$ کو $4a^2 + 2a$ میں جمع کرنے پر $4a^2 + 4a$ حاصل ہوا جو تیسرے مقسوم علیہ کی دو رقمیں ہیں۔

پانچواں مرحلہ: دوسرے باقی کی پہلی رقم $4a^2$ کو تیسرے مقسوم علیہ کی پہلی رقم سے تقسیم کرنے پر 1 حاصل ہوا جو مطلوبہ جذر کی تیسری رقم ہے۔ اس 1 کو تیسرے مقسوم علیہ میں جمع کیا جو $4a^2 + 4a + 1$ ہوگیا۔ اب اس مقسوم علیہ کو 1 سے ضرب دے کر دوسرے باقی میں سے تفریق کرنے پر صفر باقی بچا۔

پس عمل مکمل ہوگیا۔ یوں مطلوبہ جذر $2a^2 + 2a + 1$ ہے۔

واضح رہے کہ جذر نکالنے کے عمل سے پہلے اظہاریے کو متغیر کے لحاظ سے ترتیب نزولی میں لکھتے ہیں۔

مثال 2. $x^4+\frac{4}{x^2}+\frac{12}{x^3}-4x+\frac{9}{x^4}-6$ کا جذر نکالیے۔

حل: ترتیب نزولی میں لکھنے سے

$$x^4+\frac{4}{x^2}+\frac{12}{x^3}-4x+\frac{9}{x^4}-6 = x^4-4x-6+\frac{4}{x^2}+\frac{12}{x^3}+\frac{9}{x^4}$$

اب

$$\begin{array}{r|l}
 & x^2-\frac{2}{x}-\frac{3}{x^2} \\
\hline
x^2 & x^4-4x-6+\frac{4}{x^2}+\frac{12}{x^3}+\frac{9}{x^4} \\
x^2 & \underline{-}x^2 \\
\hline
2x^2-\frac{2}{x} & -4x-6+\frac{4}{x^2}+\frac{12}{x^3}+\frac{9}{x^4} \\
-\frac{2}{x} & \mp 4x \quad \pm\frac{4}{x^2} \\
\hline
2x^2-\frac{4}{x}-\frac{3}{x^2} & -6+\frac{12}{x^3}+\frac{9}{x^4} \\
-\frac{3}{x^2} & \mp 6\pm\frac{12}{x^3}\pm\frac{9}{x^4} \\
\hline
2x^2-\frac{4}{x}-\frac{6}{x^2} & 0
\end{array}$$

پس مطلوبہ جذر $= x^2-\frac{2}{x}-\frac{3}{x^2}$

مثال 3. $x^4+4x^3+10x^2+5$ میں کیا جمع کیا جائے کہ یہ مکمل مربع بن جائے؟

حل:

$$\begin{array}{r|l}
 & x^2+2x+3 \\
\hline
x^2 & x^4+4x^3+10x^2+5 \\
+x^2 & \underline{-}x^4 \\
\hline
2x^2+2x & 4x^3+10x^2+5 \\
+2x & \underline{-}4x^3\pm 4x^2 \\
\hline
2x^2+4x+3 & 6x^2+\ 0x+5 \\
3 & \underline{-}6x^2\pm 12x\pm 5 \\
\hline
2x^2+4x+6 & -12x-4
\end{array}$$

یعنی $(12x+4)-$ باقی بچا۔ گویا $12x+4$ جمع کرنے پر دیا ہوا اظہاریہ کامل مربع بن جائے گا۔

مثال 4. a اور b کی کس قیمت کے لیے $x^4+4x^3+10x^2+ax+b$ کامل مربع ہے؟

حل:

$$\begin{array}{r|l}
 & x^2+2x+3 \\
\hline
x^2 & x^4+4x^3+10x^2+ax+b \\
+x^2 & \underline{-}x^4 \\
\hline
2x^2+2x & 4x^3+10x^2+ax+b \\
+2x & \underline{-}4x^3\pm 4x^2 \\
\hline
2x^2+4x+3 & 6x^2+ax+b \\
+3 & \underline{-}6x^2\pm 12x\pm 9 \\
\hline
2x^2+4x+6 & (a-12)x+b-9
\end{array}$$

چونکہ دیا ہوا اظہاریہ کامل مربع ہے اس لیئے x کی ہر قیمت پر باقی صفر ہونا چاہئے۔

یعنی $(a-12)x+(b-9)=0$

یہ ممکن ہے اگر $a-12=0$ اور $b-9=0$

یا $a=12$ اور $b=9$

واضح رہے کہ

$$\boxed{\text{ناطق اظہاریہ کا جذر} = \frac{\text{شمار کنندہ کا جذر}}{\text{مخرج کا جذر}}}$$

مثال 5. $\dfrac{x^4y^4+2x^2y^2+1}{4z^4+8z^3+8z^2+4z+1}$ کا جذر معلوم کیجیے۔

حل:

$$\sqrt{\frac{x^4y^4+2x^2y^2+1}{4z^4+8z^3+8z^2+4z+1}}=\sqrt{\frac{(x^2y^2+1)^2}{(2z^2+2z+1)^2}}$$

$$=\frac{(x^2y^2+1)}{2z^2+2z+1}$$

مشق 5.14

مندرجہ ذیل اظہاریوں کا جذر المربع بذریعہ تقسیم معلوم کیجیے۔

1. $4a^4+8a^3+8a^2+4a+1$
2. $a^4+10a^3+31a^2+30a+9$
3. $\dfrac{x^4}{y^4}+\dfrac{y^4}{x^4}+3+\dfrac{2x^2}{y^2}+\dfrac{2y^2}{x^2}$
4. $y^4+\dfrac{1}{y^4}+2y^2+\dfrac{2}{y^2}+3$
5. $a^4+\dfrac{1}{a^4}+8\left(a^2+\dfrac{1}{a^2}\right)+18$
6. $y^4+\dfrac{1}{y^4}+4\left(y^2-\dfrac{1}{y^2}\right)+2$
7. $\left(x^2+\dfrac{1}{x^2}\right)^2+4\left(x^2-\dfrac{1}{x^2}\right)$
8. $x^4+\dfrac{y^4}{16}+z^2+\dfrac{x^2y^2}{2}-2x^2z-\left(\dfrac{y^2z}{2}\right)$
9. $4a^4+4a^3+5a^2+2a+5$ میں کیا جمع کیا جائے کہ یہ مکمل مربع بن جائے؟
10. $x^4+4x^3+10x^2+14x+7$ میں کیا جمع کیا جائے کہ یہ مکمل مربع بن جائے؟
11. p کی کسی قیمت کے لیے $4a^4+4a^3-3a^2-pa+1$ مکمل مربع ہوگا؟
12. q کی کسی قیمت کے لیے $4x^4+12x^3+25x^2+24x+q$ مکمل مربع ہوگا؟
13. p اور q کی کن قیمتوں کے لیے $4x^4+12x^3+25x^2+px+q$ مکمل مربع ہوگا۔

14. p اور q کی کن قیمتوں کے لیے $x^4 + 4x^3 + 10x^2 + px + q$ مکمل مربع ہوگا۔

مندرجہ ذیل کا جذر معلوم کیجیے۔

15. $\dfrac{(x-\frac{1}{x})^2 - 4(x-\frac{1}{x}) + 4}{(y-\frac{1}{y})^2 - 4(y+\frac{1}{y}) + 8}$ 16. $\dfrac{4a^4 + 12a^3 + 25a^2 + 24a + 16}{(b^2+\frac{1}{b^2})^2 - 8(b^2-\frac{1}{b^2}) + 12}$

متفرق مشق V

1. مندرجہ ذیل کے اجزائے ضربی معلوم کیجیے۔

(i) $d^{n+1} - d^{3n+1} - d^{5n+2}$ (ii) $r^8 - 256y^8$ (iii) $1 + 4x + 4x^2$

(iv) $(x+2y)^{2n} + 18(x+2y)^n + 81$ (v) $t^4 - 0.1t^2 + 0.0025$ (vi) $9a^{4n} - 36x^{2n}z^{4n}$

(vii) $9n^{4x} - 121m^{4y}$ (viii) $a^6 - 2a^3 - 15$ (ix) $-10x^4 - x^2y^2 + 24y^4$ (x) $64r^6 - s^6$

2. مندرجہ ذیل اظہاریوں کے اجزائے ضربی معلوم کیجیے۔

(i) $r^{12}s^{12} - y^{12}z^{12}$ (ii) $x^4y^4 - x^2y^2 + 2$

(iii) $343y^6 - 64z^6 - 7y^2 + 4z^2$ (iv) $a^6 + \frac{4}{3}a^4 + \frac{2}{7}a^3 + \frac{4}{9}a^2 + \frac{4a}{21} + \frac{1}{49}$

[اشارہ: $(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca$]

3. مسئلہ باقی کی مدد سے اجزائے ضربی معلوم کیجیے۔

(i) $a^6 - 7a^2 + 6$ (ii) $2a^6 - 3a^4 - 4$ { اشارہ: $a^2 = x$ رکھیں }

4. بذریعہ تقسیم مندرجہ ذیل کثیر رقمیوں کا عادِ اعظم معلوم کیجیے۔

$4x^3 - 3x^2 - 24x - 9$, $8x^3 - 2x^2 - 53x - 39$

5. دو کثیر رقمیوں کے عادِ اعظم اور ذو اضعاف اقل بالترتیب $(x-5)$ اور $2x^3 + 3x^2 - 44x - 105$ ہیں۔ اگر ایک کثیر رقمی $2x^2 - 3x - 35$ ہے تو دوسری کثیر رقمی معلوم کیجیے۔

6. مختصر کیجیے: $\left[\left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right) \div \left(\frac{x^2}{y^2} - 1\right)\right] \times \left[\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right) \div \left(\frac{y}{y^2+x^2}\right)\right]$

7. a اور b کی کس قیمت کے لیے $4y^4 + 12y^3 + 25y^2 + 4ay + b$ مکمل مربع ہوگا؟

.8 مندرجہ ذیل خالی جگہیں پر کیجیے۔

(i) $2a^2b + 2ab^2 - 8abc - 2abc =$ ....

(ii) $a^4b^2 - a^2b^4 = a^2b^2$ (............) (............)

(iii) $x^2y^2 + xy - 2 =$ (............) (............) کے اجزائے ضربی

(iv) $2(a-b)^2 - (a-b)^3 = (a-b)^2$ (...............)

(v) $a^4 - 0.4a^2 + 0.04 =$ .... **(vi)** $b^2 - 14b - 72 =$ ....

(vii) $5 - 12x + 7x^2 =$ .... **(viii)** $27x^6 - 125y^3 =$ ....

.9 مندرجہ ذیل خالی جگہیں پر کیجیے۔

(i) $x^3 + 8y^3$ اور $x + 2y$ کا عادِ اعظم .... ہے۔

(ii) $a^2 - 7a + 10$ اور $a^2 + a - 6$ کا ذواضعاف اقل .... ہے۔

(iii) $x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2yz + 2zx$ کا جذر المربع .... ہے۔

(iv) $x^2 + 5xy + 6y^2$ اور $x^2 + 3xy + 2y^2$ کا ذواضعاف اقل .... ہے۔

(v) $x^4 - 5x^2 + 6$ اور $x^4 - 4x^2 + 3$ کا عادِ اعظم .... ہے۔

.10 درست جواب پر نشان (✓) لگائیے۔

(i) $\frac{x^2}{2} + \frac{x}{2} - 1 =$ ....

(a) $\left(\frac{x}{2} - 1\right)\left(\frac{x}{2} + 1\right)$ **(b)** $\left(\frac{x}{2} - 1\right)\left(x - 1\right)$

(c) $\left(x - 1\right)\left(\frac{x}{2} + 1\right)$ **(d)** $\left(\frac{x}{2} - 1\right)\left(\frac{x}{2} - 1\right)$

(ii) $x^4 - 0.4x^2 + 0.04 =$ ....

(a) $(x - 2.0)^2$ **(b)** $(x^2 - 0.2)^2$ **(c)** $(x^2 - 0.2)(x - 0.2)$ **(d)** $(x^2 + 2.0)^2$

(iii) $(a^2 - b^2)^2 =$ ....

(a) $(a + 2ab + b^2)(a^2 - 2ab + b^2)$ **(b)** $(a^2 + 2ab + a^2b^2)(a^2 - 2ab + a^2b^2)$

(c) $(a^2 + 2ab + a^2b^2)^2$ **(d)** $(a^2 - 2ab + a^2b^2)^2$

(iv) $6ab^2 + 7ab - 5a =$ ....

(a) $(2b - 1)(3b + 5)$ **(b)** $(2b + 1)(3b - 5)$

(c) $a(2b - 1)(3b + 5)$ **(d)** $a(2b + 1)(3b - 5)$

(v) $x^3y^6 + 125 = \dots\dots\dots\dots\dots$

(a) $(xy^2+5)(x^2y-5)$ (b) $(xy^2+5)(x^2y^4-5xy^2+25)$

(c) $(xy^2-5)(x^4y^2+5x^2y+25)$ (d) $(x^2y^2-5)(x^4y^4-x^2y^2+25)$

(vi) $x^3 - x^2 + 2 = \dots\dots\dots\dots\dots$

(a) $(x-1)(x^2+2x+2)$ (b) $(x+1)(x^2-2x-2)$

(c) $(x+1)(x^2+2x-2)$ (d) $(x+1)(x^2-2x+2)$

.11 درست جواب پر نشان (✓) لگائیے۔

(i) اگر $(x^3 - x^2 - 226x + 1410) \div (x+17)$ تو باقی .... ہے۔

(a) 0 (b) 20 (c) 40 (d) 50

(ii) $x^4 - y^4$ اور $x^2 + y^2$ کا عادِ اعظم .... ہے۔

(a) $x^4 - y^4$ (b) $(x^2+y^2)(x^2-y^2)$ (c) x^2+y^2 (d) x^2-y^2

(iii) $x^3 - 8$ اور $x^4 - 16$ کا عادِ اعظم .... ہے۔

(a) $(x^3-8)(x^4-4)$ (b) x^4-4 (c) $x-2$ (d) $x+2$

(iv) $\dfrac{21x^2-7xy}{14x^2y-21xy^2}$ کی مختصر ترین صورت .... ہے۔

(a) $\dfrac{x-3y}{(3x-2y)\,y}$ (b) $\dfrac{3x-y}{y\,(2x-3y)}$

(c) $\dfrac{3x+y}{y\,(2x-3y)}$ (d) $\dfrac{(3x-y)y}{(2x-3y)}$

(v) $x^3 - y^3$ اور $x^6 - y^6$ کا ذو اضعاف اقل .... ہے۔

(a) x^3-y^3 (b) x^3+y^3 (c) x^6+y^6 (d) x^6-y^6

یونٹ 6

قالب

6.1 تعارف

میٹرکس (Matrix) لاطینی لفظ ہے۔ جسے ہم قالب کہیں گے۔ ریاضی میں قالب (Matrix) اشیاء (اعداد یا متغیرات) کی ایسی ترتیب کو کہتے ہیں جسے مستطیلی شکل میں لکھا جاتا ہے۔ اس کے ارکان کو کسی مخصوص ترتیب سے بڑے خطوط وحدانی میں لکھتے ہیں۔ قالبوں کو سب سے پہلے 1858ء میں آرتھر کیلے (Arther Kelly) نے متعارف کرایا تھا۔

قالبوں کو بہت سی عملی صورت حال میں استعمال کیا جاتا ہے۔ مثلاً ایک ادارہ اپنی دو مصنوعات p_1 اور p_2 اپنے دو صارفوں c_1 اور c_2 کو مہیا کرتا ہے یہ ادارہ c_1 کو بیس عدد p_1 اور c_2 کو یہی مصنوعات تیس عدد مہیا کرتا ہے۔ مزید c_1 کو مصنوعات p_2، 25 عدد اور 15 عدد صارف c_2 کو مہیا کرتا ہے۔ اسے ذیل میں اس طرح ظاہر کر سکتے ہیں۔

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} c_1 & c_2 \end{array} \\ \begin{array}{c} p_1 \\ p_2 \end{array} & \begin{bmatrix} 20 & 30 \\ 25 & 15 \end{bmatrix} \end{array}$$

مستطیلی شکل $\begin{bmatrix} 20 & 30 \\ 25 & 15 \end{bmatrix}$ کو قالب کہتے ہیں۔ اس قالب میں 30 20 اور 15 25 بالترتیب پہلی اور دوسری قطار اور $\begin{matrix} 20 \\ 25 \end{matrix}$ اور $\begin{matrix} 30 \\ 15 \end{matrix}$ بالترتیب پہلا اور دوسرا کالم (Columns) ہیں۔

اس طرح $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$ ، $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ ، $[a \quad b]$ قالبوں کی مثالیں ہیں۔

6.2 ترقیم (Notation)

قالب کو عموماً انگریزی کے بڑے حروف تہجی سے ظاہر کیا جاتا ہے۔ مثلاً

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} ، \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} ، \quad X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} ، \quad Y = [a \quad b]$$

قالب A میں ہر اندراج اس کا رکن یا عنصر (Element) کہلاتا ہے۔ 3 , 2- , 1 اور 5 قالب A کے عناصر یا ارکان ہیں۔

6.3 قالب کا مرتبہ (Order of a Matrix)

اگر کسی قالب A میں r قطاریں اور c کالم ہوں، تو قالب کا مرتبہ $r \times c$ ہوتا ہے۔ جسے لکھتے ہیں:

مرتبہ $A = r \times c$ اور پڑھتے ہیں r سے c یا (r by c).

مثلاً

$$A = \begin{bmatrix} \sqrt{3} & -5 \\ 1 & -5 \end{bmatrix}$$

مرتبہ $A = 2 \times 2$ (چونکہ قالب A میں دو قطاریں اور دو کالم ہیں)

اگر $B = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$، تو مرتبہ $B = 2 \times 1$ (چونکہ $r = 2$ اور $c = 1$)

نوٹ: (1) مرتبہ $A = 2 \times 2 \neq 4$ اور مرتبہ $B = 2 \times 1 \neq 2$

(2) کسی قالب کے مرتبہ میں (بائیں طرف سے) پہلے وہ عدد آئے گا جو قطاروں کی تعداد کو ظاہر کرتا ہو۔

6.4 عناصر یا اندراج کا جائے وقوع

2×2 مرتبے والے قالب A کی عمومی شکل یہ ہے:

$$\begin{array}{cccc} & \text{پہلا کالم} & \text{دوسرا کالم} & \\ A = & \left[\begin{matrix} a_{11} \\ a_{21} \end{matrix}\right. & \left.\begin{matrix} a_{12} \\ a_{22} \end{matrix}\right] & \begin{matrix} \text{پہلی قطار} \\ \text{دوسری قطار} \end{matrix} \end{array}$$

عنصر کے دائیں جانب نیچے لکھا ہوا عدد اس کے جائے وقوع کو ظاہر کرتا ہے۔ مثلاً a_{21} کا جائے وقوع دوسری قطار اور پہلا کالم ہے۔ a_{11} اور a_{22} وتری (Diagonal) عناصر کہلاتے ہیں۔

جس وتر میں یہ عناصر موجود ہوتے ہیں اسے وترِ خاص (Principal Diagonal) کہتے ہیں۔

6.5 قالبوں کی اقسام

6.5.1 مستطیلی قالب

اگر کسی قالب میں قطاروں اور کالموں کی تعداد برابر نہ ہو تو ایسے قالب کو مستطیلی قالب (Rectangular Matrix) کہتے ہیں۔

اگر قالب A کا مرتبہ $r \times c$ ہو اور $r \neq c$ تو A مستطیلی قالب کہلاتا ہے۔

$A = [1 \quad \sqrt{5}]$ اور $B = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ مستطیلی قالب کی مثالیں ہیں۔

مرتبہ $A = 1 \times 2$ (چونکہ $r = 1$, $c = 2$ اور $r \neq c$)

6.5.2 کالمی قالب

اگر کسی قالب میں صرف ایک کالم ہو تو اسے کالمی قالب (Column Matrix) یا کالمی سمتیہ (Column Vector) کہتے ہیں۔

$$A = \begin{bmatrix} c \\ 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} a+7 \\ b+9 \end{bmatrix}, \quad D = [5]$$

کالمی قالب کی مثالیں ہیں۔ کیونکہ ان میں سے ہر ایک میں صرف ایک کالم ہے۔

6.5.3 قطاری قالب

اگر کسی قالب میں صرف ایک قطار ہو تو اسے قطاری قالب (Row Matrix) یا قطاری سمتیہ (Row Vector) کہتے ہیں۔

$$C = [1 \quad 2], \quad D = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{5}{6} \end{bmatrix}$$

مرتبہ $C = 1 \times 2$ ؛ مرتبہ $D = 1 \times 2$

قالب C اور D قطاری قالب یا قطاری سمتیہ ہیں کیونکہ ان میں صرف ایک قطار ہے۔

6.5.4 مربعی قالب

اگر کسی قالب میں قطاروں اور کالموں کی تعداد برابر ہو تو اسے مربعی قالب (Square Matrix) کہتے ہیں۔

اگر A ایک $r \times c$ قالب ہے اور $r = c$ ہے تو A ایک مربعی قالب ہے۔

$A = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 5 & -9 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ اور $C = [100]$ مربعی قالب کی مثالیں ہیں۔

6.5.5 وتری قالب

اگر کسی مربعی قالب کے تمام عناصر صفر ہوں سوائے ان عناصر کے جو خاص وتر پر ہوں تو اسے وتری قالب (Diagonal Matrix) کہتے ہیں۔

$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$ ، $B = \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & -6 \end{bmatrix}$ اور $C = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}$ وتری قالب کی مثالیں ہیں۔

6.5.6 اسکیلر یا میزانیہ قالب

ایک وتری قالب جس کے تمام وتری عناصر برابر ہوں اسکیلر یا میزانیہ قالب *(Scalar Matrix)* کہلاتا ہے۔

$G = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ ، $C = \begin{bmatrix} d & 0 \\ 0 & d \end{bmatrix}$ اسکیلر قالب کی مثالیں ہیں۔

6.5.7 صفری قالب

ایک قالب جس کے تمام عناصر صفر ہوں صفری قالب *(Null Matrix or Zero Matrix)* کہلاتا ہے۔ اِسے عموماً O سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

$$O_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},\ O_{1\times 2} = [\,0\ \ 0\,],\ O_{2\times 1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix},\ O_1 = [\,0\,]$$

6.5.8 اکائی قالب

$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ کی شکل کے قالب کو اکائی قالب *(Unit Matrix)* کہتے ہیں۔ چونکہ یہ 2 سے 2 قالب ہے اس لیے اِسے I_2 سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

پس $I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ اِس میں تمام وتری عناصر 1 کے برابر ہیں۔

مشق 6.1

.1 خالی جگہیں پر کیجیے۔

(I) $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ میں .... قطاریں اور .... کالم ہے۔

(II) $[a\ ,\ b]$ میں .... قطار اور .... کالم ہیں۔

(III) $\begin{bmatrix} 5 & 0.5 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$ کا مرتبہ .... ہے۔

(iv) $\begin{bmatrix} \sqrt{3} + 2 \\ 5 + 7 \end{bmatrix}$ کا مرتبہ .... ہے۔

(v) [3] ایک .... قالب ہے جس کا مرتبہ .... ہے۔

(vi) $\begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 7 \end{bmatrix}$ ایک .... قالب ہے۔

(vii) اگر قالب A میں قطاروں اور کالموں کی تعداد برابر ہو تو A .... قالب کہلاتا ہے۔

(viii) $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ میں پہلی قطار اور دوسرے کالم کا عنصر .... ہے۔

2. فیصلہ کیجیے کہ دیے ہوئے بیانات صحیح ہیں یا غلط۔ اپنے جواب کی توجیہ کیجیے۔

(i) $\begin{bmatrix} 3 & 9 \\ 5 & 0 \end{bmatrix}$ ایک مربعی قالب ہے۔

(ii) $\begin{bmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ایک میزانیہ قالب ہے۔

(iii) $[2+\sqrt{5} \quad 6+3]$ کا مرتبہ 2×1 ہے۔

(iv) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ایک مستطیلی قالب ہے۔

(v) $[1 \quad 0]$ مرتبہ 2×1 والا اکائی قالب ہے۔

(vi) اگر قالب کا مرتبہ 1×2 ہے تو اس میں ایک قطار اور دو کالم ہیں۔

(vii) صفری قالب ہمیشہ مربعی قالب ہوتا ہے۔

(viii) وتری قالب ہمیشہ مربعی قالب ہوتا ہے۔

(ix) میزانیہ قالب مستطیلی قالب بھی ہو سکتا ہے۔

(x) قالب $\begin{bmatrix} 5 & 7 \\ 8 & 9 \end{bmatrix}$ میں عناصر 7 , 8 وتر خاص میں ہیں۔

(xi) مربعی قالب ہمیشہ اسکیلر قالب ہوتا ہے۔

6.6 قالب کا بدل

کسی بھی مرتبہ کے دیے ہوئے قالب کی قطاروں کو کالموں یا کالموں کو قطاروں میں تبدیل کر دینے سے جو نیا قالب حاصل ہوتا ہے اُسے دیے ہوئے قالب کا بدل (*Transpose of a Matrix*) کہتے ہیں۔

اگر دیا ہوا قالب A ہے تو اس کا بدل A^t سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

مثالیں: فرض کیا قالب $A = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ ہے۔ A کا مرتبہ 1×2 ہے۔ تو $A^t = [2 \quad 3]$ جس کا مرتبہ 2×1 ہے۔

اگر $B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 6 \end{bmatrix}$ اور مرتبہ $B = 2 \times 2$ تو قالب B کا بدل $B^t = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$ ہوگا

اور مرتبہ $B^t = 2 \times 2$

(1) اگر قالب A قالب B کا بدل ہے تو قالب B بھی قالب A کا بدل ہوگا یعنی $A^t = B \Rightarrow B^t = A$
(2) یہ نکتہ بھی غور طلب ہے کہ $(A^t)^t = A$

مثال: اگر $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ تو $A^t = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$

اور $(A^t)^t = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$

$= A$

6.7 مساوی قالب

دو قالب مساوی (Equal) کہلاتے ہیں اگر ان کے مرتبے برابر ہوں اور متناظرہ عناصر برابر ہوں۔

اگر A اور B دو مساوی قالب ہوں تو اِسے لکھتے ہیں: $A = B$

فرض کیجیے: $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$ اور $B = \begin{bmatrix} 1+1 & 2+2 \\ 1+2 & 3+2 \end{bmatrix}$

تو (I) A کا مرتبہ $= 2 \times 2 =$ B کا مرتبہ

(II) A کے متناظرہ عناصر B کے متناظر عناصر کے برابر ہیں

اس لیے $A = B$

مثال: کیا $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1^2 & 3 \\ 1+1 & \sqrt{25} \end{bmatrix}$ ؟

حل: نہیں $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$ کیونکہ متناظرہ عناصر مساوی نہیں ہیں۔ حالانکہ مرتبے برابر ہیں۔

6.8 قالبوں کی جمع

اگر دو قالبوں کے مراتب برابر ہوں تو دونوں قالب جمع کیے جانے کے قابل کہلاتے ہیں۔ دو قالبوں کو جمع کرنا ہو تو ان کے متناظر وعناصر جمع کر لیے جاتے ہیں۔

مواد کی دو رخی درجہ بندی (*Two-way classification*) میں قالب بہت معاون ثابت ہوتے ہیں۔

مثال کے طور پر ایک کمپیوٹر کی دوکان کا مالک جنوری اور فروری میں دو دکانوں A اور B کو سی ڈی روم (*CD Roms*) اور ہارڈ ڈسک (*Hard Disk*) مہیا کرتا ہے۔ جس کی تفصیل مندرجہ ذیل ہے۔

جنوری میں:

وہ A کو 25 سی ڈی روم اور B کو 30 سی ڈی روم اور A کو 20 ہارڈ ڈسک اور B کو 15 ہارڈ ڈسک مہیا کرتا ہے۔ قالب کی شکل میں اس مواد کو اس طرح دکھایا جا سکتا ہے۔

$$\begin{array}{cc} \begin{array}{cc} A & B \end{array} & \\ \begin{bmatrix} 25 & 30 \\ 20 & 15 \end{bmatrix} & \begin{array}{l} \text{سی ڈی رُوم} \\ \text{ہارڈ ڈسک} \end{array} \end{array}$$

فروری میں:

وہ A اور B کو بالترتیب 30 اور 35 سی ڈی روم اور بالترتیب 25 اور 13 ہارڈ ڈسک مہیا کرتا ہے۔ اس مواد کو قالب کی شکل میں اس طرح دکھایا جا سکتا ہے۔

$$\begin{array}{cc} \begin{array}{cc} A & B \end{array} & \\ \begin{bmatrix} 30 & 35 \\ 25 & 13 \end{bmatrix} & \begin{array}{l} \text{سی ڈی رُوم} \\ \text{ہارڈ ڈسک} \end{array} \end{array}$$

دونوں مہینوں کی کل فروخت:

ہر دوکان کو دونوں مہینوں میں فروخت شدہ سی ڈی روم اور ہارڈ ڈسک کا حساب لگایا جا سکتا ہے جو درج ذیل ہے۔

$$\begin{array}{ccccc} \begin{array}{cc} A & \quad B \end{array} & & \begin{array}{cc} A & B \end{array} & \\ \begin{bmatrix} 25+30 & 30+35 \\ 20+25 & 15+13 \end{bmatrix} & \text{یا} & \begin{bmatrix} 55 & 65 \\ 45 & 28 \end{bmatrix} & \begin{array}{l} \text{سی ڈی رُوم} \\ \text{ہارڈ ڈسک} \end{array} \end{array}$$

قالب کی ترقیم میں فرض کیجیے:

$$D = \begin{bmatrix} 30 & 35 \\ 25 & 13 \end{bmatrix} \text{(فروری میں فروخت)} \quad \text{اور} \quad C = \begin{bmatrix} 25 & 30 \\ 20 & 15 \end{bmatrix} \text{(جنوری میں فروخت)}$$

دونوں قسم کے ہارڈویر کی دونوں مہینوں میں کل فروخت درج ذیل ہے۔

$$C + D = \begin{bmatrix} 25 & 30 \\ 20 & 15 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 30 & 35 \\ 25 & 13 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 25+30 & 30+35 \\ 20+25 & 15+13 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 55 & 65 \\ 45 & 28 \end{bmatrix}$$

پس صرف وہی قالب جمع کیے جاسکتے ہیں جن کے مرتبے ایک جیسے ہوں۔

اسی طرح فرض کیجیے: $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$ ، $B = \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 9 & 10 \end{bmatrix}$

چونکہ مرتبہ A = مرتبہ B

اس لیے A اور B جمع کے لیے سازگار یا قابل (Confomable) ہیں اور

$$A + B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 9 & 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2+4 & 3+6 \\ 5+9 & 6+10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 9 \\ 14 & 16 \end{bmatrix}$$

عمومی اصول:

اگر $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ اور $B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}$ تو

$$A + B = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} \end{bmatrix}$$

6.9 جمعی ذاتی قالب

تمام حقیقی اعداد a کے لیے $a + 0 = a = 0 + a$

اسی طرح قالبوں کی جمع میں $A + O = A = O + A$

جبکہ "O" ایک صفری قالب ہے جسے جمعی ذاتی قالب *(Additive Identity Matrix)* بھی کہا جاتا ہے۔

اگر $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$ اور $O = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ تو

$$A + O = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2+0 & 3+0 \\ 5+0 & 6+0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} = A \quad \ldots \text{(i)}$$

اور

$$O + A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0+2 & 0+3 \\ 0+5 & 0+6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} = A \ldots \text{(ii)}$$

(i) اور (ii) سے یہ واضح ہو جاتا ہے کہ $A + O = A = O + A$

6.10 قالب کا جمعی معکوس

حقیقی اعداد کے لیے ہمارے علم میں ہے کہ

(i) تفریق کا عمل جمع کے عمل کا معکوس ہے۔

(ii) اگر دو حقیقی اعداد کا مجموعہ صفر ہو تو وہ اعداد ایک دوسرے کے جمعی معکوس کہلاتے ہیں۔ مثلاً 3 اور 3- ایک دوسرے کے جمع معکوس ہیں۔

اسی طرح دو قالب A اور B ایسے ہوں کہ ان کا مجموعہ A + B صفری قالب ہو تو A اور B ایک دوسرے کے جمعی معکوس کہلاتے ہیں۔

مثلاً $A = \begin{bmatrix} 3 \\ -4 \end{bmatrix}$ ، $B = \begin{bmatrix} -3 \\ 4 \end{bmatrix}$ ایک دوسرے کے جمعی معکوس ہیں کیونکہ

$$A + B = \begin{bmatrix} 3 \\ -4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -3 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -3 \\ -4 & +4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

قالب A کے جمعی معکوس کو A- لکھا جاتا ہے جو A کے تمام عناصر کی علامات (*Signs*) کو تبدیل کر کے حاصل کیا جاتا ہے۔

مثلاً اگر $B = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -4 & 5 \end{bmatrix}$ تو $-B = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 4 & -5 \end{bmatrix}$

مثال: اگر $A = \begin{bmatrix} 7 & -8 \\ 6 & 3 \end{bmatrix}$ ثابت کیجیے کہ $B = \begin{bmatrix} -7 & 8 \\ -6 & -3 \end{bmatrix}$ ، A کا جمع معکوس ہے۔

حل: $A = \begin{bmatrix} 7 & -8 \\ 6 & 3 \end{bmatrix}$ ، $B = \begin{bmatrix} -7 & 8 \\ -6 & -3 \end{bmatrix}$

$$A + B = \begin{bmatrix} 7 & -8 \\ 6 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -7 & 8 \\ -6 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7-7 & -8+8 \\ 6-6 & 3-3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

پس ثابت ہوا کہ A کا جمعی معکوس B ہے۔ ہم B کو A- اور A کو B- لکھ سکتے ہیں۔

6.11 خاصیت مبادلہ بلحاظ جمع

حقیقی اعداد a اور b کے لیے ہمارے علم میں ہے کہ

$$a+b=b+a \qquad \text{(خاصیت مبادلہ بلحاظ جمع)}$$

اسی طرح اگر قالبوں A اور B کے مرتبے ایک ہی ہوں تو $A+B=B+A$ یعنی قالبوں کی جمع بھی خاصیت مبادلہ بلحاظ جمع رکھتی ہے۔

فرض کیجیے: $A=\begin{bmatrix}2 & 3\\ 5 & 6\end{bmatrix}$ اور $B=\begin{bmatrix}4 & 6\\ 9 & 10\end{bmatrix}$

چونکہ مرتبہ A = مرتبہ B

اس لیے

$$A+B=\begin{bmatrix}2 & 3\\ 5 & 6\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}4 & 6\\ 9 & 10\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2+4 & 3+6\\ 5+9 & 6+10\end{bmatrix}$$

$$A+B=\begin{bmatrix}5 & 9\\ 14 & 16\end{bmatrix} \quad \cdots \quad \text{(i)}$$

اب

$$B+A=\begin{bmatrix}4 & 6\\ 9 & 10\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}2 & 3\\ 5 & 6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4+2 & 6+3\\ 9+5 & 10+6\end{bmatrix}$$

$$B+A=\begin{bmatrix}6 & 9\\ 14 & 16\end{bmatrix} \quad \cdots \quad \text{(ii)}$$

(i) اور (ii) کے حوالے سے یہ واضح ہوتا ہے کہ $A+B=B+A$

6.12 خاصیت تلازم بلحاظ جمع

اگر قالبوں A, B اور C کے مرتبے ایک ہی ہوں تو

$$A+(B+C)=(A+B)+C$$

لہٰذا قالبوں کی جمع خاصیت تلازم رکھتی ہے

نوٹ: طلباء اس کی پڑتال بطور مشق خود کریں۔

6.13 قالبوں کی تفریق

اگر قالبوں A اور B کے مرتبے ایک ہی ہوں تو ہم اِن کی تفریق A − B کی اس طرح تعریف کرتے ہیں:

$$A - B = A + (-B)$$

جبکہ B− قالب B کا جمعی معکوس ہے۔

مثال: اگر $A = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 9 & 4 \end{bmatrix}$ ، $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ تو

$$A - B = A + (-B) = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 9 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5-2 & 3-1 \\ 9-0 & 4-3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 9 & 1 \end{bmatrix}$$

عمومی اصول:

اگر $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ اور $B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}$ تو

$$A - B = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}-b_{11} & a_{12}-b_{12} \\ a_{21}-b_{21} & a_{22}-b_{22} \end{bmatrix}$$

مشق 6.2

مندرجہ ذیل قالبوں میں کون سے مساوی ہیں؟ اپنے جواب کی وضاحت کیجیے۔

1. $\begin{bmatrix} 5 & 9 \\ 6 & 4 \end{bmatrix}$ اور $\begin{bmatrix} 6-1 & 18-9 \\ 5+1 & 2+2 \end{bmatrix}$

2. $\begin{bmatrix} 3 \\ 7 \end{bmatrix}$ اور $\begin{bmatrix} 3-0 & 2+5 \end{bmatrix}$

3. $\begin{bmatrix} 5+2 & 19 \\ 13 & 7-1 \end{bmatrix}$ اور $\begin{bmatrix} 7 & 9+10 \\ 11+2 & 6 \end{bmatrix}$

x اور y کی وہ قیمت معلوم کیجیے جن سے قالبوں کی مساوات درست ہو جائے۔

4. $\begin{bmatrix} x \\ -7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ y \end{bmatrix}$

5. $\begin{bmatrix} 0.2x & 5 \\ 0.3y & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 6-1 \\ 3 & 2+4 \end{bmatrix}$

6. $\begin{bmatrix} \sqrt{5}\,x & \sqrt{5}\,y \\ \sqrt{5} & \sqrt{5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{5} & \sqrt{5} \\ \sqrt{5} & \sqrt{5} \end{bmatrix}$

مختصر کیجیے اگر ممکن ہو:

.7 $\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 9 & 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 5 \\ 9 \end{bmatrix}$ .8 $\begin{bmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & a_{22} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{21} \end{bmatrix}$

.9 $\begin{bmatrix} 0.7 & 0.8 \\ 0.9 & 0.4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 9 & 6 \end{bmatrix}$ .10 $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ 6 & 5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$

مندرجہ ذیل قالبوں میں سے ہر ایک کے جمعی معکوس معلوم کیجیے۔

.11 $\begin{bmatrix} 5 & -5 \\ -5 & -5 \end{bmatrix}$ .12 $\begin{bmatrix} -7 \\ 8 \end{bmatrix}$ .13 $\begin{bmatrix} -6 & 8 \\ -7 & 12 \end{bmatrix}$ .14 $\begin{bmatrix} 12 & 13 \\ 14 & 15 \end{bmatrix}$

اگر $X = \begin{bmatrix} -6 & 8 \\ -7 & 12 \end{bmatrix}$ ، $Y = \begin{bmatrix} 12 & 13 \\ 14 & 15 \end{bmatrix}$ ، $Z = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ اور $O = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

تو ثابت کیجیے کہ:

.15 $(X + Y) + Z = X + (Y + Z) = X + (Z + Y)$ .16 $(Y + Z) + O = Y + (Z + O)$

6.14 قالب کی حقیقی عدد سے ضرب

ایک عنصر والے قالب کا مرتبہ 1×1 ہوتا ہے۔ اس لیے قالبوں کے مطالعہ میں 1×1 قالب اور حقیقی عدد میں پہچان کے لیے حقیقی عدد کو میزانیہ (Scalar) کہتے ہیں۔ کسی قالب $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ کی عدد k سے ضرب کی تعریف یہ ہے:

$$k \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ka & kb \\ kc & kd \end{bmatrix}$$

یہ واضح رہے کہ قالب کے ہر عنصر کو k سے ضرب دی گئی ہے۔

اس ضرب کو میزانیہ ضرب (Scalar Multiplication) کہتے ہیں۔

مثال 1.

$$3 \begin{bmatrix} 15 & 10 \\ 16 & 17 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \times 15 & 3 \times 10 \\ 3 \times 16 & 3 \times 17 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 45 & 30 \\ 48 & 51 \end{bmatrix}$$

مثال 2.

$$\frac{5}{4} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{5}{4} \times 1 \\ \frac{5}{4} \times 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{5}{4} \\ \frac{10}{4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{5}{4} \\ \frac{5}{2} \end{bmatrix}$$

6.15 قالبوں کی ضرب

دو قالبوں کی ضرب اسی وقت ممکن ہے جب پہلے قالب (یا بائیں طرف والے قالب) کے کالموں کی تعداد اور دوسرے قالب (یا دائیں طرف والے قالب) کی قطاروں کی تعداد کے برابر ہو۔

اگر قالب A کا مرتبہ $m \times n$ اور قالب B کا مرتبہ $n \times p$ ہو تو $A \times B$ یا AB معلوم کیا جاسکتا ہے۔ اگر مطلوبہ قالب C ہو تو C کا مرتبہ $m \times p$ ہوگا یعنی (دوسرے قالب میں قطاروں کی تعداد × پہلے قالب میں کالموں کی تعداد)۔

قالبوں کے ضرب کو سمجھنے کے لیے مندرجہ ذیل مثالوں پر غور کیجیے۔

مثال 1. فرض کیجیے۔ $A = [3 \quad 2]$ اور $B = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \end{bmatrix}$ یہاں A کا مرتبہ $= 1 \times 2$ ، اور B کا مرتبہ $= 2 \times 1$

چونکہ A میں کالموں کی تعداد = B میں قطاروں کی تعداد = 2 اس لیے AB معلوم کیا جاسکتا ہے۔

مندرجہ ذیل طریقے سے حاصل ضرب معلوم کرسکتے ہیں۔

$$AB = [3 \quad 2] \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$C = [3 \times 1 + 2 + 5]$ (چونکہ AB = C جیسا کہ اوپر بیان کیا گیا ہے)

$= [3 + 10] = [13]$

C کا مرتبہ $= 1 \times 1$

مثال 2. فرض کیجیے۔ $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ اور $B = \begin{bmatrix} 7 & 9 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$ یہاں A کا مرتبہ $= 2 \times 2$ ، اور B کا مرتبہ $= 2 \times 2$

چونکہ A کا مرتبہ $= 2 \times 2$ اور B کا مرتبہ 2×2 لہٰذا A میں کالموں کی تعداد = B میں قطاروں کی تعداد

پس AB حاصل ہوسکتا ہے یا A اور B ضرب کے قابل ہیں۔

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 & 9 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$$

$1 \times 7 + 2 \times 5$ ، $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 & 9 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 17 & \\ & \end{bmatrix}$ B کا پہلا کالم × A کی پہلی قطار

$1 \times 9 + 2 \times 6$ ، $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 & 9 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 17 & 21 \\ & \end{bmatrix}$ B کا دوسرا کالم × A کی پہلی قطار

B کا پہلا کالم × A کی دوسری قطار $\begin{bmatrix}1 & 2\\3 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}7 & 9\\5 & 6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}17 & 21\\41 & \end{bmatrix}$، $3\times7+4\times5$

B کا دوسرا کالم × A کی دوسری قطار $\begin{bmatrix}1 & 2\\3 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}7 & 9\\5 & 6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}17 & 21\\41 & 51\end{bmatrix}$، $3\times9+4\times6$

پس
$$AB=\begin{bmatrix}1 & 2\\3 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}7 & 9\\5 & 6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}17 & 21\\41 & 51\end{bmatrix}$$

نوٹ: عام طور پر $AB \neq BA$

مثال 3. اگر $A=\begin{bmatrix}2 & 1\\5 & 0\end{bmatrix}$ اور $B=\begin{bmatrix}3\\4\end{bmatrix}$، مرتبہ $A=2\times2$ اور مرتبہ $B=2\times1$

چونکہ: A میں کالموں کی تعداد = B میں قطاروں کی تعداد ، لہٰذا AB ممکن ہے۔

$$AB=\begin{bmatrix}2 & 1\\5 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3\\4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\times3+1\times4\\5\times3+0\times4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6+4\\15+0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}10\\15\end{bmatrix}$$ اور AB کا مرتبہ $=2\times1$

جبکہ BA حاصل نہ ہوسکے گا اس لیے کہ B میں کالموں کی تعداد $\neq$ A میں قطاروں کی تعداد

مثال 4. ساجد اور عابد پنسل اور پنسل تراش خریدنا چاہتے تھے۔ انھوں نے دو مختلف دوکانداروں سے ان کے نرخ معلوم کیے۔ انھوں نے مندرجہ ذیل انداز سے دو جدول تیار کیں ایک جدول اشیاء کی مقدار کو ظاہر کرتی تھی اور دوسری نرخوں کو جو دکانداروں نے بتائے تھے۔

	پنسل کی تعداد	پنسل تراش کی تعداد
ساجد	8	2
عابد	4	6

جدول 1

	پہلا دکاندار	دوسرا دکاندار
پنسلوں کے نرخ	3 روپے فی پنسل	4 روپے فی پنسل
پنسل تراشوں کے نرخ	4 روپے فی پنسل تراش	5 روپے فی پنسل تراش

جدول 2

(ہم دیکھتے ہیں کہ جدول 1 میں کالموں کی تعداد جدول 2 میں قطاروں کی تعداد کے برابر ہے)

پہلے دکاندار سے ساجد نے 8 پنسلیں فی پنسل 3 روپے اور 2 پنسل تراش فی پنسل تراش 4 روپے کے حساب سے خریدے

جن کی قیمت ہوئی: $8 \times 3 + 2 \times 4 = 32$ روپے

دوسرے دکاندار سے 8 پنسلیں فی پنسل 4 روپے اور 2 پنسل تراش فی پنسل تراش 5 روپے کے حساب سے خریدے جن کی

قیمت ہوئی: $8 \times 4 + 2 \times 5 = 42$ روپے

اس طرح عابد نے پہلے دکاندار سے 4 پنسلیں فی پنسل 3 روپے اور 6 پنسل تراش فی پنسل تراش 4 روپے کے حساب سے خریدے جن

کی قیمت ہوئی: $4 \times 3 + 6 \times 4 = 36$ روپے

دوسرے دکاندار سے 4 پنسلیں فی پنسل 4 روپے اور 6 پنسل تراش فی پنسل تراش 5 روپے کے حساب سے خریدے

جن کی قیمت ہوئی: $4 \times 4 + 6 \times 5 = 46$ روپے

اشیاء کی قیمت معلوم کرنے کے لیے جدول 1 کے قطاری عناصر یا اندراج

8	2
4	6

کو جدول 2 کے متناظر کالمی عناصر

3	4
4	5

سے ضرب دے کر حاصل ضرب کو جمع کیا جاتا ہے۔

جیسے مندرجہ ذیل جدول میں دکھایا گیا ہے۔

$8 \times 3 + 2 \times 4$	$8 \times 4 + 2 \times 5$
$4 \times 3 + 6 \times 4$	$4 \times 4 + 6 \times 5$

$\Rightarrow$

32	42
36	46

مندرجہ بالا بحث دو قالبوں کی ضرب کے طریقے کی طرف رہنمائی کرتی ہے۔

$A = \begin{bmatrix} 8 & 2 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}$ اور $B = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$ کا حاصل ضرب مندرجہ ذیل ہے۔

$$AB = \begin{bmatrix} 8 & 2 \\ 4 & 6 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \times 3 + 2 \times 4 & 8 \times 4 + 2 \times 5 \\ 4 \times 3 + 6 \times 4 & 4 \times 4 + 6 \times 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 32 & 42 \\ 36 & 46 \end{bmatrix}$$

6.16 قالبوں کے ضرب کی خصوصیات

6.16.1 قالبوں کی خاصیت تلازم بلحاظ ضرب

فرض کیجیے A, B اور C تینوں قالب ضرب کے قابل ہیں۔ تو $A(BC) = (AB)C$

اسے قالبوں کی خاصیت تلازم بلحاظ ضرب کہتے ہیں۔

یہ تب ہی ممکن ہے جب AB اور BC دونوں حاصل ہو سکیں۔

مثال: فرض کیجیے۔ $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ ، $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$ ، $C = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$

تو ثابت کیجیے کہ $(AB)C = A(BC)$

پڑتال:

$$L.H.S = (AB)C$$

لہٰذا

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1\times 1 + 3\times 3 & 1\times 0 + 3\times(-1) \\ 2\times 1 + 4\times 3 & 2\times 0 + 4\times(-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & -3 \\ 14 & -4 \end{bmatrix}$$

پس

$$(AB)C = \begin{bmatrix} 10 & -3 \\ 14 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 10\times(-1) + (-3)\times 2 & 10\times(-2) + (-3)\times 4 \\ 14\times(-1) + (-4)\times 2 & 14\times(-2) + (-4)\times(4) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -10-6 & -20-12 \\ -14-8 & -28-16 \end{bmatrix}$$

$$(AB)C = \begin{bmatrix} -16 & -32 \\ -22 & -44 \end{bmatrix} \quad \cdots \quad (1)$$

$$R.H.S = A(BC)$$

$$BC = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1\times(-1) + 0\times 2 & 1\times(-2) + 0\times 4 \\ 3\times(-1) + (-1)\times 2 & 3\times(-2) + (-1)\times 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1+0 & -2+0 \\ -3-2 & -6-4 \end{bmatrix}$$

$$BC = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ -5 & -10 \end{bmatrix}$$

$$A(BC) = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ -5 & -10 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1\times(-1) + 3\times(-5) & 1\times(-2) + 3\times(-10) \\ 2\times(-1) + 4\times(-5) & 2\times(-2) + 4\times(-10) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1-15 & -2-30 \\ -2-20 & -4-40 \end{bmatrix}$$

$$A(BC) = \begin{bmatrix} -16 & -32 \\ -22 & -44 \end{bmatrix} \quad \cdots \quad (2)$$

(1) اور (2) سے واضح ہوتا ہے کہ $(AB)C = A(BC)$

6.16.2 قالبوں کی ضرب کی خاصیت تقسیمی بلحاظ جمع

اگر A , B اور C کسی بھی مرتبے کے قالب ہوں تو $A(B + C) = AB + AC$ بشرطیکہ AB، BC اور $AB + AC$ حاصل ہوسکیں۔

اسی طرح $(B + C) A = BA + CA$ بشرطیکہ BA , CA اور $BA + CA$ حاصل ہوسکیں۔

6.16.3 قالبوں کی ضرب کی خاصیت تقسیمی بلحاظ تفریق

اگر A , B اور C کسی بھی مرتبے کے قالب ہوں تو $A(B - C) = AB - AC$ اور $(B - C) A = BA - CA$

بشرطیکہ $B - C$, AB , BA , AC اور CA حاصل ہوسکیں۔

مثال 1. فرض کیجیے: $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ ، $B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ اور $C = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$

تو ثابت کیجیے کہ $A(B + C) = AB + AC$

پڑتال:

$$L.H.S = A(B + C)$$

لہٰذا

$$B + C = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2-1 & 3-2 \\ 0+3 & 1+5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$$

پس

$$A(B + C) = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 \times 1 + 3 \times 3 & 1 \times 1 + 3 \times 6 \\ 2 \times 1 + 4 \times 3 & 2 \times 1 + 4 \times 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+9 & 1+18 \\ 2+12 & 2+24 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 10 & 19 \\ 14 & 26 \end{bmatrix} \quad \ldots \quad (i)$$

$$R.H.S = AB + AC$$

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 \times 2 + 3 \times 0 & 1 \times 3 + 3 \times 1 \\ 2 \times 2 + 4 \times 0 & 2 \times 3 + 4 \times 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 4 & 10 \end{bmatrix}$$

$$AC = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1\times(-1)+3\times3 & 1\times(-2)+3\times5 \\ 2\times(-1)+4\times3 & 2\times(-2)+4\times5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 13 \\ 10 & 16 \end{bmatrix}$$

$$AB + AC = \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 4 & 10 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 8 & 13 \\ 10 & 16 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 19 \\ 14 & 26 \end{bmatrix} \quad \cdots \quad \text{(ii)}$$

(i) اور (ii) سے یہ واضح ہوتا ہے کہ $A(B+C) = AB + AC$

طلباء $(B+C)A = BA + CA$ کی پڑتال خود کریں۔

مثال 2. فرض کیجیے: $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ ، $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ اور $C = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$

تو ثابت کیجیے کہ $A(B-C) = AB - AC$

پڑتال: $L.H.S = A(B-C)$

لہٰذا $B + (-C) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -3 \\ -1 & -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+0 & 2-3 \\ 0-1 & -1-5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -6 \end{bmatrix}$

پس $A(B-C) = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -6 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} 1\times1+3\times(-1) & 1\times(-1)+3\times(-6) \\ 2\times1+4\times(-1) & 2\times(-1)+4\times(-6) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-3 & -1-18 \\ 2-4 & -2-24 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -2 & -19 \\ -2 & -26 \end{bmatrix} \quad \cdots \quad \text{(i)}$$

$R.H.S = AB - AC$

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1\times1+3\times0 & 1\times2+3\times(-1) \\ 2\times1+4\times0 & 2\times2+4\times(-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$$

اور

$$AC = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1\times0+3\times1 & 1\times3+3\times5 \\ 2\times0+4\times1 & 2\times3+4\times5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 18 \\ 4 & 26 \end{bmatrix}$$

$$AB - AC = AB + (-AC)$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -3 & -18 \\ -4 & -26 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-3 & -1-18 \\ 2-4 & 0-26 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -2 & -19 \\ -2 & -26 \end{bmatrix} \quad \dots \text{(ii)}$$

(i) اور (ii) سے یہ واضح ہوتا ہے کہ $A(B-C) = AB - AC$

طلبا خود پڑتال کریں کہ: $(B-C)A = BA - CA$

مشق 6.3

اگر ممکن ہو تو حاصل ضرب معلوم کیجیے۔

1. $\begin{bmatrix} 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \end{bmatrix}$

2. $\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \end{bmatrix}$

3. $\begin{bmatrix} 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 6 \end{bmatrix}$

4. $\begin{bmatrix} 5 \\ 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 \end{bmatrix}$

5. $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}$

6. $\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 7 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$

7. $\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

8. $\begin{bmatrix} 6 & -5 \\ 7 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

9. $3 \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 6 & 1 \end{bmatrix}$

10. $10 \begin{bmatrix} 0.1 & 0.6 \\ 0.9 & 0.3 \end{bmatrix}$

11. فرح 5 کتابیں اور 4 سی ڈی خریدنا چاہتی ہے۔ کتابیں اور سی ڈی بالترتیب فی کتاب 50 روپے اور فی سی ڈی 30 روپے میں فروخت ہو رہی ہیں۔

(a) کتابوں اور سی ڈی کی تعداد کو قطاری قالب سے ظاہر کیجیے۔

(b) قیمتوں کو ظاہر کرنے کے لیے کالمی قالب استعمال کیجیے۔

(c) قالبوں کی ضرب کے ذریعے 5 کتابوں اور 4 سی ڈی کی کل قیمت معلوم کیجیے۔

.12 ایک کمپنی دو طرح کے مشروب بناتی ہے۔ جن کی فروری اور مارچ کی فروخت مندرجہ ذیل جدول میں دی گئی ہے۔

مہینہ / مشروب کی قسم	پہلی قسم	دوسری قسم
فروری	4	6
مارچ	4.5	7

اہم بات: فروخت فی ہزار میں دی گئی ہے۔ فروخت میں 50% اضافہ کمپنی کا ہدف ہے۔

(a) جدول میں دیے گئے مواد کو قالب کی شکل میں لکھیے۔

(b) ہدف کو ظاہر کرنے والا قالب لکھیے۔ (اشارہ: ہر اندراج کو 1.5 سے ضرب دیجیے)۔

.13 ایک بڑی کارپوریشن کی فروخت، فی اکائی کل منافع اور ٹیکس درج ذیل جدول میں دیے گئے ہیں۔

جدول 1

مہینہ / فروخت	مصنوعات I	مصنوعات II
جون	4	2
دسمبر	6	1

جدول 2

مصنوعات	منافع	ٹیکس
مصنوعات I	3.5	1.5
مصنوعات II	2	1

ہر مہینے کے نفع اور ٹیکس کو ایک قالب کی صورت میں ظاہر کیجیے۔

.14 اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ ، $B = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$ ، $C = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$ تو ثابت کیجیے:

(i) $AB \neq BA$ (ii) $(AB)C = A(BC)$ (iii) $(BA)C = B(AC)$

(iv) $A(B+C) = AB + AC$ (v) $A(C+B) = AC + AB$ (vi) $A(C-B) = AC - AB$

(vii) $B(A-C) = BA - BC$ (viii) $AC \neq CA$

6.17 ضربی ذاتی قالب

ضربی ذاتی قالب (*Multiplicative Identity Matrix*) کو I سے ظاہر کیا جاتا ہے جسے اکائی قالب بھی کہتے ہیں، ایک مربعی قالب ہوتا ہے، جس کے خاص وتر کا ہر اندراج 1 ہوتا ہے اس کے علاوہ تمام اندراجات صفر ہوتے ہیں مثلاً

$I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ، ایک 2×2 ضربی ذاتی قالب ہے۔

$I_1 = [1]$ ، ایک 1×1 ضربی ذاتی قالب ہے۔

نوٹ: اگر 2×2 مرتبے کا کوئی قالب A ہے تو $AI_2 = I_2A = A$ اسی وجہ سے I کو ضربی ذاتی قالب اور اکائی قالب بلحاظ ضرب کہتے ہیں۔

مثال: اگر $A = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ اور $I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ تو ثابت کیجیے کہ $AI_2 = I_2A = A$

پڑتال:

$$AI_2 = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 5 \times 1 + 4 \times 0 & 5 \times 0 + 4 \times 1 \\ 2 \times 1 + 3 \times 0 & 2 \times 0 + 3 \times 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

پس $AI_2 = A \quad \ldots (1)$

اب

$$I_2A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 \times 5 + 0 \times 2 & 1 \times 4 + 0 \times 3 \\ 0 \times 5 + 1 \times 2 & 0 \times 4 + 1 \times 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

پس $I_2A = A \quad \ldots (2)$

(1) اور (2) سے یہ واضح ہوتا ہے کہ $AI_2 = I_2A = A$

6.18 قالب کا مقطع

مربعی قالب سے منسوب عدد اس کا مقطع یا مشخص (*Determinant*) کہلاتا ہے اگر A کوئی مربع قالب ہو تو اسے کے مقطع کو det A یا |A| سے ظاہر کرتے ہیں۔

اس کی تعریف یوں کرتے ہیں:

اگر $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ تو

$$|A| = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

مثال: فرض کیجیے: $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ تو

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 1 \times 4 - 3 \times 2 = 4 - 6 = -2$$

6.19 نادر اور غیر نادر قالب

اگر کسی قالب کا مقطع صفر ہو تو اِسے نادر قالب *(Singular Matrix)* کہتے ہیں۔ اور اگر مقطع صفر نہ ہو تو اسے غیر نادر قالب *(Non-Singular Matrix)* کہتے ہیں۔

مثال1. فرض کیجیے: $A = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ تو

$$|A| = \begin{vmatrix} 5 & 4 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 5 \times 3 - 4 \times 2 = 15 - 8 = 7$$

چونکہ $|A| \neq 0$ اس لیے A غیر نادر قالب ہے۔

مثال2. فرض کیجیے: $B = \begin{bmatrix} 6 & 4 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ تو

$$|B| = \begin{vmatrix} 6 & 4 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 6 \times 2 - 4 \times 3 = 12 - 12 = 0$$

چونکہ $|B| = 0$ اس لیے B نادر قالب ہے۔

6.20 قالب کا مُتّصِل *(Adjoint of a Matrix)*

مرتبہ 2×2 کے قالب A پر غور کرتے ہیں۔

فرض کیجیے $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ تو A کے متصل (Adjoint) کو جسے Adj A لکھا جاتا ہے، قالب A کے خاص وتر کے ارکان کو آپس میں تبدیل کرکے اور دوسرے عناصر کی علامات بدل کر حاصل کیا جاتا ہے۔

پس
$$\text{Adj } A = \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

6.21 قالب کا ضربی معکوس

حقیقی اعداد کے سیٹ میں اگر دو اعداد کا حاصل ضرب "1" ہو تو ان اعداد کو ایک دوسرے کا ضربی معکوس کہا جاتا ہے۔

اسی طرح اگر دو قالبوں A اور B کے لیے $AB = I = BA$

تو A, B کا ضربی معکوس (*Multiplicative Inverse*) کہلاتا ہے A کے ضربی معکوس کو A^{-1} سے ظاہر کیا جاتا ہے جبکہ "I" ضربی ذاتی قالب ہے۔

پس $$AA^{-1} = I = A^{-1}A$$

واضح رہے کہ اگر کوئی قالب A غیر نادر قالب ہے تو اس کا ضربی معکوس معلوم کیا جا سکتا ہے اور اُسے معکوس پذیر (*Invertible*) کہتے ہیں۔ نادر قالب کا ضربی معکوس معلوم نہیں کیا جا سکتا ہے لہٰذا اُسے غیر معکوس پذیر (*Non-Invertible*) کہا جاتا ہے۔

اگر A غیر نادر قالب ہو تو اس کا ضربی معکوس ہوگا۔ $\boxed{A^{-1} = \dfrac{\text{Adj } A}{|A|}}$

مثال: اگر $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}$ تو A^{-1} معلوم کیجیے اگر ممکن ہو۔

حل:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow |A| = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} = 3 \times 4 - 5 \times 2 = 12 - 10 = 2$$

چونکہ $|A| \neq 0$ اس لیے A^{-1} معلوم کیا جا سکتا ہے۔

اب

$$\text{Adj } A = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -5 & 3 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{\text{Adj } A}{|A|}$$

$$A^{-1} = \frac{\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -5 & 3 \end{bmatrix}}{2} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -5 & 3 \end{bmatrix}$$

اس امر کی تصدیق کی جا سکتی ہے کہ $AA^{-1} = I = A^{-1}A$

مشق 6.4

.1 مندرجہ ذیل قالبوں کے مقطع (Determinants) معلوم کیجیے۔

(a) $\begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 8 & -\sqrt{2} \\ 5 & \sqrt{2} \end{bmatrix}$ (c) $\begin{bmatrix} \sqrt{64} & 8 \\ 8 & \sqrt{64} \end{bmatrix}$

.2 مندرجہ ذیل میں کون سے قالب غیر نادر ہیں؟

(a) $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} -4 & 2 \\ -5 & 2 \end{bmatrix}$ (c) $\begin{bmatrix} -4 & 5 \\ 8 & -10 \end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 6 & \sqrt{9} \end{bmatrix}$

.3 سوال نمبر 2 میں دیے گئے قالبوں کے متصل (Adjoint) معلوم کیجیے۔

.4 اگر ممکن ہو تو مندرجہ ذیل قالبوں کے ضربی معکوس معلوم کیجیے۔

(a) $\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 6 & 7 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ (c) $\begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 8 & -5 \end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix} 0.5 & 5 \\ 0.2 & 2 \end{bmatrix}$

(e) $\begin{bmatrix} 0.3 & 0.2 \\ 0.1 & 0.2 \end{bmatrix}$ (f) $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & \frac{3}{2} \end{bmatrix}$

.5 مندرجہ ذیل کی پڑتال کیجیے:

(a) اگر $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ تو $AA^{-1} = I = A^{-1}A$

(b) اگر $B = \begin{bmatrix} 16 & 20 \\ 14 & 15 \end{bmatrix}$ تو $BI = B = IB$

(c) اگر $C = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ اور $D = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}$ تو $CD = I = DC$ آپ C اور D کے بارے میں کیا کہتے ہیں؟

(d) اگر $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$ تو $|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$ اس سوال میں A^{-1} کا مقطع A کے مقطع کا ضربی معکوس ہے۔ کیا عام طور پر یہ درست ہے؟

(e) اگر $A = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$ اور $B = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 8 & 0 \end{bmatrix}$ تو $|AB| = |A|\,|B|$

(ا) اگر $A = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ اور

(i) $B = 2A$ تو $|B| = 4|A|$ (ii) $B = 3A$ تو $|B| = 9|A|$ (iii) $B = 4A$ تو $|B| = 16|A|$

کیا آپ ایک عمومی نتیجہ لکھ سکتے ہیں۔

.6 x کی قیمت معلوم کیجیے اگر:

(i) A ایک نادر قالب ہے جبکہ $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ x & 5 \end{bmatrix}$

(ii) $A = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & x \end{bmatrix}$ اور $B = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$ ایک دوسرے کے ضربی معکوس ہیں۔

(iii) $\begin{bmatrix} x \\ x+5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 14 \end{bmatrix}$ (iv) $[x \quad 5]\begin{bmatrix} 6 \\ x \end{bmatrix} = [132]$

6.22 دو ہمزاد یک درجی مساواتوں کا حل بذریعہ قالب

قالبوں کی مدد سے دو یک درجی مساواتیں ساتھ ساتھ حل کی جا سکتی ہیں۔

فرض کیجیے:

$$\begin{aligned} ax + by &= e \\ cx + dy &= f \end{aligned} \quad \dots (1)$$

انھیں قالب کی شکل میں اسطرح لکھ سکتے ہیں:

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e \\ f \end{bmatrix}$$

اگر $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ ، $B = \begin{bmatrix} e \\ f \end{bmatrix}$ اور $X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ تو

$$AX = B \quad \dots\dots (i)$$

اگر $|A| = ad - bc \neq 0$ تو A^{-1} حاصل کیا جا سکتا ہے۔ (i) کو A^{-1} سے ضرب دینے سے

$$A^{-1}AX = A^{-1}B$$

یا $(A^{-1}A)X = A^{-1}B$

یا $I_2X = A^{-1}B$

یا $X = A^{-1}B$

لیکن $X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ ، $A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{d}{ad-bc} & \frac{-b}{ad-bc} \\ \frac{-c}{ad-bc} & \frac{a}{ad-bc} \end{bmatrix}$ اور $B = \begin{bmatrix} e \\ f \end{bmatrix}$

پس

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{d}{ad-bc} & \frac{-b}{ad-bc} \\ \frac{-c}{ad-bc} & \frac{a}{ad-bc} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e \\ f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{de-bf}{ad-bc} \\ \frac{af-ce}{ad-bc} \end{bmatrix}$$

دو قالبوں کے مساوی ہونے کی رو سے

$$x = \frac{de-bf}{ad-bc} \quad , \quad y = \frac{af-ce}{ad-bc} \quad \ldots \text{(ii)}$$

پس (i) کا واحد حل ہے جو کہ (ii) میں دیا گیا ہے۔

مندرجہ ذیل مثالوں پر غور کیجیے۔

مثال 1. حل کیجیے: $5x - 2y = 1,$
$2x - y = 0$

حل: پہلا مرحلہ: دی گئی مساواتوں کو قالب کی شکل میں ڈھالیے۔

$$\begin{bmatrix} 5x-2y \\ 2x-y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

نوٹ: $\begin{bmatrix} 5 & -2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5x & -2y \\ 2x & -y \end{bmatrix}$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

دوسرا مرحلہ: قالبوں کو نام دیجیے۔

فرض کیجیے: $A = \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$ ، $X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ ، $B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

پس $AX = B$

تیسرا مرحلہ: ہمیں $|A|$ معلوم کرنا چاہیے۔

$$|A| = 5(-1) - 2(-2) = -5 + 4 = -1 \neq 0$$

اس لیے A^{-1} معلوم کیا جا سکتا ہے اور دی گئی مساواتیں حل پذیر ہیں جو کہ یہ ہے:

$$X = A^{-1} B \quad \ldots (1)$$

چوتھا مرحلہ:

$$\text{Adj A} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{\text{Adj A}}{|A|}$$

$$\Rightarrow \quad A^{-1} = \frac{\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}}{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -5 \end{bmatrix}$$

لہٰذا مساوات (1) میں X ، A^{-1} اور B کی جگہ قالب رکھنے سے

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \times 1 + (-2) \times 0 \\ 2 \times 1 + (-5) \times 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

یا $x = 1 \,,\; y = 2$

حل سیٹ = $\{(1\,,2)\}$

مثال 2. اگر ممکن ہو، حل کیجیے:

$$2x + 3y = 8$$
$$6x + 9y = 24$$

حل: پہلا مرحلہ: دی گئی مساواتوں کو قالب کی شکل میں ڈھالیے۔

$$\begin{bmatrix} 2x + 3y \\ 6x + 9y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 24 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 6 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 24 \end{bmatrix}$$

دوسرا مرحلہ: قالبوں کو نام دیجیے۔

فرض کیجیے: $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 6 & 9 \end{bmatrix}$ ، $X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ ، $B = \begin{bmatrix} 8 \\ 24 \end{bmatrix}$

پس $AX = B$

$$\Rightarrow X = A^{-1} B$$

تیسرا مرحلہ: ہمیں $|A|$ معلوم کرنا چاہیے۔

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 6 & 9 \end{vmatrix} = 2 \times 9 - 6 \times 3 = 18 - 18 = 0$$

لہٰذا A^{-1} معلوم نہیں کیا جاسکتا، اس لیے یہ ممکن نہیں ہے کہ دی گئی مساواتوں کا حل معلوم کیا جاسکے۔

6.23 اصولِ کریمر

مساواتوں کے نظام کا حل ایک اور طریقے سے بھی معلوم کیا جاتا ہے۔ اسے کریمر کا اصول (Cramer's Rule) کہتے ہیں جس کی وضاحت ذیل میں کی گئی ہے۔

دو متغیرات x اور y میں دو یک درجی مساواتوں کے عمومی نظام پر غور کیجیے۔

$$\text{(i)} \ldots \qquad a_1x + b_1y = c_1$$

$$\text{(ii)} \ldots \qquad a_2x + b_2y = c_2$$

جبکہ a_1 ، a_2 ، b_1 ، b_2 ، c_1 اور c_2 حقیقی اعداد ہیں مساواتوں (i) اور (ii) سے y حذف کرنے کے لیے مساوات (i) کو b_2 سے اور مساوات (ii) کو b_1 سے ضرب دینے سے:

$$\text{(iii)} \ldots \qquad a_1b_2x + b_1b_2y = b_2c_1$$

$$\text{(iv)} \ldots \qquad a_2b_1x + b_1b_2y = b_1c_2$$

(iv) کو (iii) میں سے تفریق کرنے سے: $a_1b_2x - a_2b_1x = b_2c_1 - b_1c_2$

یا $(a_1b_2 - a_2b_1)x = b_2c_1 - b_1c_2$

یا $x = \dfrac{b_2c_1 - b_1c_2}{a_1b_2 - a_2b_1}$ ، ($b_2a_1 - a_2b_1 \neq 0$ جبکہ)

(v) ... یا $$x = \frac{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}$$

اسی طرح سے y کی قیمت معلوم کرنے کے لیے x کو حذف کیا جاسکتا ہے۔

$$a_2b_1y - a_1b_2y = a_2c_1 - a_1c_2$$

یا $y = \dfrac{a_1c_2 - a_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1}$ ، $(a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0)$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}$$ یا ... (vi)

مساواتیں (v) اور (vi) مطلوبہ حل فراہم کرتی ہیں جبکہ $a_1 b_2 - a_2 b_1 \neq 0$

مندرجہ ذیل بالا تین مقطع کو نام دینے سے:

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}, \quad D_x = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}, \quad D_y = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}$$

اصول کریمر: دو متغیرات کی دو یک درجی مساواتوں کے نظام

$$a_1x + b_1y = c_1 \quad ; \quad a_2x + b_2y = c_2$$

جیسا کہ

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}, \quad D_x = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}, \quad D_y = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}$$

مساواتوں کا حل ہوگا:

$$x = \frac{D_x}{D}, \quad y = \frac{D_y}{D}$$ جبکہ $D \neq 0$

مثال: 1. کریمر کے اصول پر نظام کو حل کیجیے۔

$$5x - 2y = 1$$
$$2x - y = 0$$

حل: پہلے D معلوم کرتے ہیں۔

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & -2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -5 + 4 = -1$$

چونکہ $D \neq 0$ اس لیے ان کا حل ممکن ہے۔

اب ہم D_x اور D_y معلوم کرتے ہیں۔

$$D_x = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = 1 \times (-1) - (0) \times (-2) = 1$$

$$D_y = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 5 \times 0 - 2 \times 1 = -2$$

کریمر کے اصول کے مطابق

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{-1}{-1} = 1 \quad , \quad y = \frac{D_y}{D} = \frac{-2}{-1} = 2$$

حل سیٹ $\{(1, 2)\}$

طلباء اس مثال کی پڑتال بطور مشق خود کریں۔

مثال 2. اگر ممکن ہو حل کیجیے۔

$$\begin{aligned} 2x - 4y &= 8 \\ x - 2y &= 4 \end{aligned}$$

حل: پہلے D معلوم کرتے ہیں۔

$$D = \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 2 \times (-2) - 1 \times (-4) = -4 + 4 = 0$$

چونکہ $D = 0$ اس لیے مندرجہ بالا نظام کا حل ممکن نہیں۔

مشق 6.5

اگر ممکن ہو قالبوں کے ذریعے اور کریمر کے اصول کا استعمال کرتے ہوئے حل کیجیے۔

1. $2x + 5y = 9$, $4x - 2y = 1$
2. $8x - 4y = 2$, $x + 2y = 4$
3. $4x + y = 2$, $7x + 2y = 3$
4. $2x - 3y = -7$, $3x + 2y = -4$
5. $3x + 6y = 5$, $4x + 8y = 9$
6. $y = 2x + 2$, $x = 3 - 2y$
7. $2x + 3y = -3$, $4x + 3y = 5$
8. $-72x + y = 6$, $26x + 18y = 2$
9. $3x + y = 1$, $30x + 10y = 4$
10. $x + 2y = 6$, $2x + 7y = 3$

متفرق مشق VI

.1 اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$ اور $B = \begin{bmatrix} 6 & 3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$ تو ثابت کیجیے کہ $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

.2 سوال نمبر 1 میں دیے ہوئے قالبوں کو استعمال کرتے ہوئے ثابت کیجیے۔

(i) $A^2 - B^2 \neq (A + B)(A - B)$ (ii) $(A + B)^2 \neq A^2 + 2AB + B^2$

(iii) $(A - B)^2 \neq A^2 - 2AB + B^2$

مندرجہ بالا کلیے قالبوں کے لیے کیوں درست نہیں۔ وضاحت کیجیے۔

.3 مندرجہ ذیل بیانات میں جو صحیح ہوں ان کے لیے T لکھیے جو غلط ہوں F لکھیے۔

(i) $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ کا مرتبہ 2×1 ہے۔

(ii) $[2 \quad 3]$ اور $\begin{bmatrix} 5 \\ 6 \end{bmatrix}$ ضرب کے لیے سازگار ہیں۔

(iii) اگر A اور B، 2×2 مرتبے والے قالب ہوں اور K کوئی مستقل ہو تو $K(A + B) = KA + KB$

(iv) 2×2 کے قالبوں کے سیٹ میں $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ جمعی ذاتی قالب (*Additive Identity*) ہے۔

(v) اگر قالب A کا مرتبہ 2×1 اور B کا 1×2 ہے تو حاصل ضرب قالب AB کا مرتبہ 1×1 ہوگا۔

(vi) اگر $A = \begin{bmatrix} 1 \\ 6 \end{bmatrix}$، $B = [7 \quad 9]$، $C = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$ تو

(*a*) AB کا مرتبہ 2×2 ہے (*b*) $CA = AC$

(*c*) $BC = [50 \quad 66]$ (*d*) $AB = \begin{bmatrix} 7 & 9 \\ 42 & 54 \end{bmatrix}$

(*e*) $BA = [61]$

مندرجہ ذیل مساواتوں کے نظام کو قالبی مساوات کی شکل $AX = B$ میں تحریر کیجیے۔

(i) $2x - 4y = 3$, $4x - 2y = -5$ (ii) $5x + 3y = 6$, $2x + 4y = -7$ (iii) $-2x + 3y = -2$, $5x - 6y = 8$

(iv) $5x + 2 = 2y$, $3x = 5 - 3y$ (v) $5y = 7$, $2y + 6x = 3$ (vi) $2 - 3y = 2x$, $6 + 2x = 6y$

5. مندرجہ ذیل ہر ایک قالبی مساوات کو مساواتوں کے نظام کی صورت میں لکھیے۔

(i) $\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 7 \end{bmatrix}$ (ii) $\begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \end{bmatrix}$

(iii) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$ (iv) $\begin{bmatrix} 5 & 6 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

6. مندرجہ ذیل جوڑوں میں کون سے قالب ایک دوسرے کے ضربی معکوس ہیں۔

(i) $\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 11 & 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 11 & 3 \end{bmatrix}$ (ii) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

(iii) $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -12 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ (iv) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

7. فرض کیجیے: $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ اور $B = \begin{bmatrix} 2 & 7 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$

(i) $|A|$ ، $|B|$ اور $|AB|$ معلوم کیجیے۔کیا $|AB| = |A|\,|B|$ ہے؟

(ii) A^{-1} اور $|A^{-1}|$ معلوم کیجیے۔کیا $|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$ ہے؟

(iii) $|-3B|$ معلوم کیجیے کیا $|-3B| = -3\,|B|$ ہے؟

(iv) $|2B|$ معلوم کیجیے کیا $|2B| = 2\,|B|$ ہے؟

خالی جگہیں پر کیجیے۔

(i) اگر $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ تو $ad - bc$ .... کہلاتا ہے۔

(ii) اگر $|A| = 0$ تو قالب A .... کہلاتا ہے۔

(iii) نادر قالب کا .... معلوم نہیں کیا جا سکتا۔

(iv) $\begin{bmatrix} 0 & 5b \\ 3c & -1 \end{bmatrix}$ کا جمعی معکوس .... ہے۔

(v) اگر دو قالب برابر ہوں تو اُن کے مرتبے .... ہیں۔

(vi) وتری قالب میں خاص وتر کے ارکان کے علاوہ تمام ارکان .... ہوتے ہیں۔

(vii) $\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$ .... قالب ہے۔

(viii) دو قالب ضرب کے قابل ہوں گے اگر پہلے میں کالموں کی تعداد = دوسرے میں .... کی تعداد

(ix) اگر $A = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$ تو $A^t =$ ....

(x) قالب A کے ضربی معکوس کو .... لکھتے ہیں۔

یونٹ 7

علم ہندسہ کے بنیادی تصورات

7.1 استقرائی اور استخراجی استدلال

روزمرہ زندگی میں اکثر و بیشتر ایسے مواقع آتے ہیں کہ ہم مشاہدے کی بنیاد پر نتائج اخذ کرتے ہیں۔ مثلاً

(الف) ہم چند درختوں کا مشاہدہ کرتے ہیں اور دیکھتے ہیں کہ ان کی پتیاں سبز ہیں اور اس سے یہ نتیجہ اخذ کرتے ہیں کہ "تمام درختوں کی پتیاں سبز ہیں"۔

(ب) ہم یکے بعد دیگرے 8 یا 10 مثلث لیتے ہیں اور ہر ایک کے زاویوں کی پیائش کرتے ہیں اور دیکھتے ہیں کہ ہر مثلث کے زاویوں کا مجموعہ 180° ہے اس سے یہ نتیجہ اخذ کرتے ہیں کہ "کسی بھی مثلث کے تمام زاویوں کا مجموعہ 180° ہوتا ہے"۔

اس طرح کسی عموی نتیجے پر پہنچنا استقرائی طریقہ استدلال (*Inductive Method*) کہلاتا ہے۔

تاہم استقرائی طریقہ کے استعمال کے دوران چند احتیاطیں مدِنظر رکھنی چاہئیں ورنہ ہم غلط نتائج اخذ کر سکتے ہیں۔

احتیاطیں یہ ہیں:

(1) عموی نتیجے پر پہنچنے کے لیے کافی تعداد میں مثالوں کا مشاہدہ کرنا چاہئے۔

(2) جو مثالیں زیرِ غور ہوں جامع ہونی چاہئیں۔

ان تمام احتیاطوں کے باوجود استقرائی طریقہ سے حاصل شدہ نتیجے کے صحیح ہونے کا یقین نہیں کیا جاسکتا۔ اسی وجہ سے ریاضی کی زیادہ تر شاخوں بالخصوص علم ہندسہ (*Geometry*) کو استخراجی طریقہ استدلال (*Deductive Method*) کے ذریعہ سمجھا جاتا ہے۔

استخراجی طریقہ میں ہم عموی نتائج سے خصوصی نتائج اخذ کرتے ہیں۔

مثلاً ہمارے علم میں ہے کہ "ہر شخص فانی ہے"۔

اس حقیقت سے ہم مخصوص افراد کے بارے میں نتائج اخذ کر سکتے ہیں جیسے

ذوالفقار ایک آدمی ہے	اس لیے ذوالفقار فانی ہے
کریم ایک آدمی ہے	کہ اس لیے کریم فانی ہے

اسی طرح ہم جانتے ہیں کہ ایک مثلث کے زاویوں کا مجموعہ $180°$ ہے اس بات سے ہم مخصوص مثلثوں کے بارے میں نتائج اخذ کر سکتے ہیں۔

مثلاً

ABC ایک مثلث ہے	اس لیے	$m\angle A + m\angle B + m\angle C = 180°$
PQR ایک مثلث ہے	اس لیے	$m\angle P + m\angle Q + m\angle R = 180°$

استخراجی طریقہ کا ہمیشہ یہ مطلب نہیں ہے کہ ہم ایک عمومی بیان سے ایک خصوصی بیان اخذ کرتے ہیں استخراجی طریقہ میں یقین کا عنصر ہمیشہ موجود ہوتا ہے۔ اس طریقے میں ہم ایک بیان کو صحیح مانتے ہیں جو اُن بیانات سے ماخوذ ہوتا ہے جو پہلے ہی صحیح تسلیم کیے جا چکے ہوں یا ثابت کیے جا چکے ہوں۔ اس طریقہ میں علیحدہ سے استدلال یا خارجی شواہد کی ضرورت نہیں پڑتی جیسا کہ استقرائی طریقہ میں ہوتا ہے۔ استخراجی استنباط دراصل ایک عقلی تجزیہ، ایک منطقی لازمہ ہے۔

7.2 استخراجی طریقہ کے اوصاف

علم کی کوئی بھی شاخ جو استخراجی طریقے سے متعلق ہو مندرجہ ذیل اوصاف (Characteristics) رکھتی ہے۔

(i) کچھ تصورات بغیر تعریف کے قبول کر لیے جاتے ہیں جو "غیر تعریف شدہ اصطلاحات" (Undefined Terms) کہلاتی ہیں۔ مثلاً علم ہندسہ میں نقطہ، خط، مستوی، مکان غیر تعریف شدہ اصطلاحات ہیں۔ اور ان تصورات کو بغیر تعریف کے قبول کر لیا گیا ہے۔

(ii) غیر تعریف شدہ اصطلاحات کی مدد سے کچھ بیانات بلا ثبوت مان لیے جاتے ہیں۔ جنھیں بنیادی مفروضے (Fundamental Agreement) کہتے ہیں۔ یہ بیانات ان اوصاف کا تعین کرتے ہیں جنھیں ہم غیر تعریف شدہ اصطلاحات سے وابستہ کرنا چاہتے ہیں ایک ریاضی دان کو ان بیانات کی صداقت سے کوئی دلچسپی نہیں ہوتی۔ بنیادی مفروضے دراصل فرض کی ہوئی بات ہے۔ جو ضروری نہیں کہ بدیہی سچ ہوں۔ ان مفروضوں سے منطقی استدلال استعمال کرتے ہوئے کوئی چیز وضع کی جا سکتی ہے۔

بنیادی مفروضے دو طرح کے ہوتے ہیں۔ اصول متعارفہ (Axioms) اور اصول موضوعہ (Postulates)

اصول متعارفہ وہ بنیادی مفروضے ہیں جو اعداد سے متعلق ہوتے ہیں مثلاً

"ہر عدد خود اپنے برابر ہے۔"

یا "ایک ہی عدد اگر مساوی اعداد میں جمع کیے جائیں تو ان کے مجموعے برابر ہوتے ہیں"

اصول موضوعہ وہ بنیادی مفروضے ہیں جو ہندسی اشکال سے متعلق ہوتے ہیں مثلاً

"دو مختلف نقاط میں سے صرف ایک ہی خط گزرتا ہے۔"

(iii) غیر تعریف شدہ اصطلات اور بنیادی مفروضوں (یعنی اصول موضوعہ) کی مدد سے دیگر تصورات کی تکمیل کی جاتی ہے۔ اور مزید اصطلاحات کی تعریف کی جاتی ہے۔ ان کو تعریف اصطلاحات کہتے ہیں۔

مثلاً "ایک مستطیل ایک متوازی الاضلاع ہے جس میں کم از کم ایک زاویہ قائمہ ہوتا ہے۔"

(iv) غیر تعریف اصطلاحات، اصول موضوعہ اور تعریف شدہ اصطلاحات کی مدد سے نئے بیانات متعارف کرائے جاتے ہیں اور استنباط کے ذریعے ثابت کیے جاتے ہیں ایسے بیانات کو مسائل ہندسی (Theorems) کہا جاتا ہے۔

مثلاً "اگر ایک مثلث کے دو ضلعوں کے متقابلہ زاویے متماثل ہوں تو وہ ضلعے بھی متماثل ہوتے ہیں۔"

اب ہم چند بنیادی اصطلاحات اور متعلقہ اصول موضوعہ پر غور کرتے ہیں جو ہمیں مسائل کو سمجھنے اور انھیں استنباط کے ذریعے ثابت کرنے میں رہنمائی فراہم کرتے ہیں۔

7.3 بنیادی تصورات

7.3.1 غیر تعریف شدہ اصطلاحات (Undefined Terms)

جیسا کہ پہلے بیان ہو چکا ہے کہ اصطلاحات نقطہ، خط، مستوی اور مکان کو بلا تعریف قبول کر لیتے ہیں۔

نقاط کو انگریزی کے بڑے حروف سے پکاریں اور ظاہر کریں گے:

A, B, C, ...P, Q, R, ...P_1, P_2, ... وغیرہ

خطوط کو انگریزی کے چھوٹے حروف سے ظاہر کریں گے:

$a, b, c, ..., l, m, n, ..., l_1, l_2, l_3 ......$ وغیرہ

مستویوں (Plans) یعنی مستوی سطحوں کو اس طرح ظاہر کریں گے:

$p, q, r, \ldots\ \ldots, p_1, p_2, p_3, \ldots$ وغیرہ یا یونانی الفاظ α, β, γ .... وغیرہ

$P \in l$ کا مطلب ہے نقطہ P خط l پر ہے یا خط l نقطہ P سے گزرتا ہے۔

اسی طرح $l \in \alpha$ کا مطلب ہے: خط l مستوی α پر ہے یا مستوی α خط l سے گزرتا ہے۔

نقاط کے سیٹ ہندسی اشکال کہلاتے ہیں۔ پس خط اور مستوی بھی ہندسی اشکال ہیں۔ ہندسی اشکال کا غذ یا کسی دوسری شئے پر ان کی تصاویر کے ذریعے ظاہر کی جاتی ہیں۔ مثال کے طور پر نقطہ کی تصویر ایک چھوٹی سی بندی (•) ہوتی ہیں۔ یہ بندی بجائے خود نقطہ نہیں بلکہ اس نقطہ کی تصویر ہے جو وہاں واقع ہے۔ چھوٹی ترین بندی نقطہ کا بہترین اظہار ہے۔ بالکل اسی طرح "ایک خط کھینچئے" کا مطلب ہے "خط کی تصویر بنانا"۔

ابتدائی طور پر مندرجہ ذیل چند باتیں سامنے آتی ہیں:

(i) نقطہ، خط کا تحتی سیٹ ہے خط مستوی کا تحتی سیٹ اور مستوی، مکان کا تحتی سیٹ ہے۔ لہٰذا ایک نقطہ مستوی کا اور مکان کا تحتی سیٹ ہے اسی طرح ایک خط مکان کا تحتی سیٹ ہے۔

(ii) ایک نقطہ میں کوئی بعُد (Dimension) نہیں ہوتا ہے۔ خط میں ایک بعُد ہوتا ہے یعنی "لمبائی"۔ مستوی میں دو بعد ہوتے ہیں یعنی لمبائی اور چوڑائی مکان میں تین بعد ہوتے ہیں یعنی لمبائی، چوڑائی اور اونچائی (یا گہرائی)۔

7.3.2 منطبق نقاط

اگر دو نقاط P اور Q ایک ہی محل وقوع ظاہر کرتے ہوں تو انھیں منطبق نقاط (Coincident Points) کہتے ہیں اور علامتی طور پر P = Q لکھتے ہیں۔

7.3.3 منطبق خطوط

اگر دو خطوط l_1 , l_2 ایک ہی خط کو ظاہر کرتے ہوں تو انھیں منطبق خطوط (Coincident Lines) کہتے ہیں اور علامتی طور پر $l_1 = l_2$ لکھتے ہیں۔

اصول موضوعہ 1. دو مختلف نقاط سے صرف اور صرف ایک ہی خط گزرتا ہے۔

یا دو نقاط ایک خط کا تعین کرتے ہیں۔

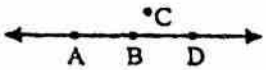
نوٹ 1. "ایک اور صرف ایک خط گزرتا ہے" کے معنی ہیں ایک سے زیادہ نہیں، صرف ایک ہی خط گزرتا ہے۔ اگر ایک سے زیادہ

• خطوط ہوں تو وہ منطبق خطوط ہوتے ہیں یعنی ایک ہی خط۔

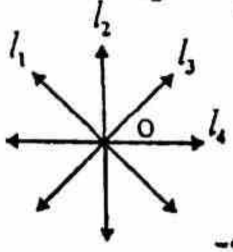
نوٹ 2. یہ اصول موضوعہ دلالت کرتا ہے کہ دو مختلف خطوط l اور m میں اگر کوئی مشترک نقطہ ہے تو وہ صرف ایک ہوگا یعنی دو مختلف خطوط کا تقاطع سیٹ خالی یا ایک رکنی ہوتا ہے۔

7.3.4 ہم خط اور غیر ہم خط نقاط

اگر نقاط ایک ہی خط پر واقع ہوں تو ہم خط نقاط (Collinear Points) کہلاتے ہیں اگر نقاط اگر ایک ہی خط پر واقع نہ ہوں تو غیر ہم خط نقاط (Non - Collinear Points) کہلاتے ہیں۔



نقاط A, B اور D ہم خط نقاط ہیں لیکن C, B, A یا D,C,A یا D,C,B,A غیر ہم خط نقاط ہیں۔ یہ واضح رہے کہ اصول موضوعہ 1 کی رو سے دو نقاط ہمیشہ ہم خط ہوتے ہیں۔ مثلاً B اور C , C اور D , A اور C ہم خط نقاط ہیں۔



اصول موضوعہ 2. ایک نقطہ سے بے شمار خطوط گزر سکتے ہیں۔

خطوط l_1, l_2, l_3,......, l_n نقطہ O سے گزر رہے ہیں۔

اصول موضوعہ 3. تین غیر ہم خط نقاط سے صرف اور صرف ایک مستوی گزرتی ہے۔

اصول موضوعہ 4. اگر ایک خط l کے کوئی دو نقاط مستوی پر واقع ہوں تو پورا خط مستوی پر واقع ہوتا ہے۔

نوٹ: اس اصول موضوعہ سے یہ واضح ہے کہ مستوی کی سطح ہموار ہوتی ہے اور ہر طرف لامحدود ہوتی ہے یعنی اس کا کوئی کنارا نہیں ہوتا۔

اصول موضوعہ 5. فاصلہ کا موضوعہ: اگر A اور B کسی مستوی کے دو مختلف نقاط ہوں تو مستوی کے نقاط کے ہر جوڑے (P,Q) کے ساتھ ایک حقیقی عدد اس طرح وابستہ کیا جا سکتا ہے کہ

(i) اگر (P,Q) = (A,B) تو یہ عدد 1 (ایک) ہوتا ہے۔

(ii) اگر P = Q تو یہ عدد 0 (صفر) ہوتا ہے۔

(iii) اگر P, Q مختلف ہوں تو یہ عدد مثبت ہوتا ہے۔

اس اصول موضوعہ کے مطابق دو نقاط کے کسی جوڑے سے جو مثبت عدد وابستہ ہوتا ہے وہ ایک نقطہ سے دوسرے نقطہ کا فاصلہ کہلاتا ہے۔ P سے Q کا فاصلہ $m\overline{PQ}$ یا $|\overline{PQ}|$ سے ظاہر کیا جاتا ہے جبکہ m سے مراد پیمائش ہے یہ واضح رہنا چاہیے کہ Q سے P کا فاصلہ $m\overline{QP}$ یا $|\overline{QP}|$ ہے اور

$$m\overline{QP} = m\overline{PQ} \text{ یا } |\overline{QP}| = |\overline{PQ}|$$

7.3.5 درمیان اور پرے

اگر C, B, A کوئی بھی تین ہم خط نقاط اس طرح ہوں کہ

$$m\overline{AB} + m\overline{BC} = m\overline{AC},$$

تو نقطہ B نقاط A اور C کے درمیان (*Between*) کہلاتا ہے۔

نقطہ C خط AB پر نقطہ B سے پرے (*Beyond*) کہلاتا ہے۔ اسی طرح نقطہ A خط BC پر B سے پرے ہے۔

7.3.6 قطعہ خط (Line Segment)

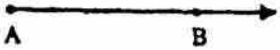
اگر A اور B کوئی بھی دو نقاط ہیں تو قطعہ خط AB جسے $\overline{AB}$ سے ظاہر کیا جاتا ہے، ایسے نقاط کے سیٹ پر مشتمل ہے جس میں

(i) نقاط A اور B اور (ii) A اور B کے درمیان تمام نقاط ہوتے ہیں۔

نقاط A اور B قطعہ خط AB کے سرے (End Points) کہلاتے ہیں۔

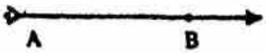
7.3.7 شعاع اور نصف خط (Ray and Half Line)

اگر A اور B کوئی دو نقاط ہوں تو شعاع AB جسے $\overrightarrow{AB}$ سے ظاہر کیا جاتا ہے، جو کہ اتصال ہے۔



(i) $\overline{AB}$ کے تمام نقاط اور (ii) $\overleftrightarrow{AB}$ کے B سے پرے کے تمام نقاط کا

A کو $\overrightarrow{AB}$ کا سرا کہتے ہیں۔



نقطہ A کے علاوہ شعاع AB کو نصف خط AB کہتے ہیں۔ جسے $\overrightarrow{AB}$ سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

اسی طرح $\overrightarrow{BA}$ اتصال ہے:

(i) $\overline{AB}$ کے نقاط اور (ii) $\overleftrightarrow{BA}$ کے A سے پرے کے تمام نقاط کا

مندرجہ بالا تعریف سے ظاہر ہوتا ہے کہ

$\overrightarrow{AB} \cap \overrightarrow{BA} = \overline{AB}$ اور $\overrightarrow{AB} \cup \overrightarrow{BA} = \overleftrightarrow{AB}$

7.3.8 محدب سیٹ

ایک مستوی کے نقاط کا ایسا سیٹ محدب سیٹ (Convex Set) کہلاتا ہے اگر اس سیٹ کے کسی دو نقاط A اور B کے لیے قطعہ خط AB اس سیٹ میں موجود ہو۔

قطعہ خط، شعاعیں، خطوط اور مستوی محدب سیٹ ہیں چند غیر محدب سیٹ نیچے دیے گئے ہیں۔

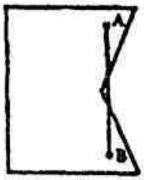


Fig (i)

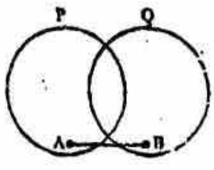


Fig (ii)

شکل (i) محدب سیٹ نہیں ہے شکل (ii) میں $P \cap Q$ محدب سیٹ ہے لیکن $P \cup Q$ محدب سیٹ نہیں ہے۔

7.3.9 مخالف شعاعیں

دو شعاعیں $\overrightarrow{AB}$ اور $\overrightarrow{AC}$ مخالف شعاعیں (Oposite Rays) کہلاتی ہیں اگر

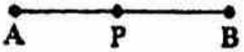
(i) دونوں ہم خط ہوں

(ii) دونوں کا سرا مشترک ہو

(iii) ان کا تقاطع صرف مشترک سرا ہو۔

مندرجہ، بالا تصویر میں $\overrightarrow{AB}$ اور $\overrightarrow{AC}$ مخالف شعاعیں ہیں کیونکہ وہ متعلقہ شرائط پر پوری اترتی ہیں۔

اصول موضوعہ 6. ایک قطعہ خط کی تنصیف صرف اور صرف ایک نقطہ پر کی جا سکتی ہے۔

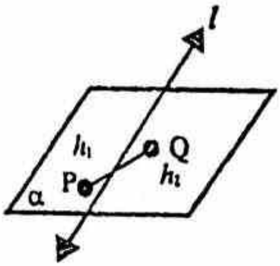


اس اصول موضوعہ کے اعتبار سے ایک قطعہ خط AB پر صرف اور صرف ایک نقطہ (فرض کیا P) A اور B کے درمیان ایسا ہوتا ہے کہ

$$m\,\overline{AP} = m\,\overline{BP}$$

اصول موضوعہ 7. ایک قطعہ خط کو دونوں اطراف کسی بھی حد تک بڑھایا جا سکتا ہے۔

اصول موضوعہ 8. مستوی کے بٹوارے کا موضوعہ: اگر خط l کسی مستوی α پر واقع ہو تو، خط l مستوی α کو تحتی سیٹوں h_1 اور h_2 میں اس طرح تقسیم کرتا ہے کہ



(i) h_1 اور h_2 میں سے ہر ایک محدب سیٹ ہے اور

(ii) اگر P، l_1 پر اور Q، l_2 پر میں واقع ہو تو PQ خط l کو قطع کرتا ہے۔

تعریفات:

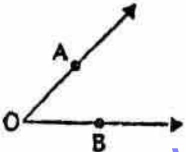
(i) h_1 اور h_2 میں سے ہر ایک کو نصف مستوی کہتے ہیں۔

(ii) خط l کو ہر نصف مستوی کا کنارا (*Edge*) کہا جاتا ہے۔

(iii) اگر دو نقاط ایک ہی نصف مستوی میں واقع ہوں تو وہ خط l کے ایک ہی طرف واقع ہوتے ہیں۔

(iv) اگر P ایک نصف مستوی اور Q دوسری نصف مستوی میں واقع ہوں تو P اور Q خط l کے مخالف طراف میں واقع ہوتے ہیں۔

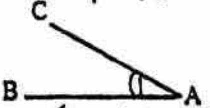
7.3.10 زاویہ



ایک زاویہ (*Angle*) دو ایسی غیر ہم خط شعاعوں کا اتصال ہے جن کے سرے مشترک ہوں۔

شعاعیں جو زاویہ کی تشکیل کرتی ہیں اسکے ضلعے (یا بازو) کہلاتے ہیں اور مشترک نقطہ زاویہ کا راس کہلاتا ہے۔

اس شکل میں $\overrightarrow{OA}$ اور $\overrightarrow{OB}$ دو غیر ہم خط شعاعیں ہیں جن کا ایک مشترک سرا O ہے $\overrightarrow{OA}$ اور $\overrightarrow{OB}$ زاویہ AOB کے ضلعے اور O اس کا راس ہے۔ زاویہ کو علامت "$\angle$" سے ظاہر کیا جاتا ہے اس طرح اوپر دیے ہوئے زاویہ کو $\angle AOB$ یا $\angle BOA$ یا $\angle O$ سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

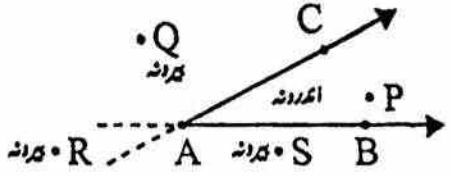


اس شکل میں دو قطعات $\overline{AB}$ اور $\overline{AC}$ کا اتصال زاویہ کی پوری نمائندگی نہیں کرتا لیکن $\overline{AB}$ اور $\overline{AC}$ شعاعوں $\overrightarrow{AB}$ اور $\overrightarrow{AC}$ کا تعین کرتے ہیں جو زاویہ BAC (یا $\angle CAB$) کی مکمل تشکیل کرتی ہیں۔ یوں $\overline{AB}$ اور $\overline{AC}$ زاویہ BAC کا تعین کرتے ہیں۔ جسے $\angle BAC$, $\angle CAB$ یا $\angle A$ سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

کبھی کبھی زاویہ کو عدد یا حرف کی شکل میں خاص نام دیا جاتا ہے۔

مثلاً $\angle 1, \angle 2, \ldots, \angle x, \angle y, \ldots$ وغیرہ

7.3.11 زاویہ کا اندرونہ اور بیرونہ



اس شکل میں نقطہ P زاویہ BCA میں (کے اندر) ہے اگر

(i) نقاط P اور C خط AB کے ایک ہی طرف واقع ہوں۔

(ii) نقاط P اور B خط AC کے ایک ہی طرف واقع ہوں۔

مستوی کے ایسے تمام نقاط کا سیٹ جو زاویہ کے بازوؤں کے درمیان ہوں "زاویہ کا اندرونہ" (*Interior of an angle*) کہلاتا ہے۔

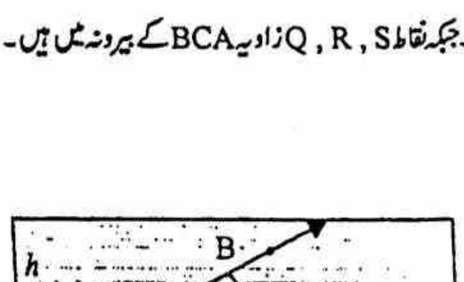
مستوی کے ان تمام نقاط کا سیٹ جو نہ زاویہ کے بازوؤں پر ہوں اور نہ اندرونہ میں ہوں "زاویہ کا بیرونہ" (*Exterior of an angle*) کہلاتا ہے۔

اوپر دی ہوئی شکل میں نقطہ P زاویہ BAC کے اندرونہ میں ہے۔ جبکہ نقاط Q , R , S زاویہ BCA کے بیرونہ میں ہیں۔

نقاط A, B, C زاویہ BAC کے نقاط ہیں۔

اصول موضوعہ 9. زاویہ کی بناوٹ کا موضوعہ

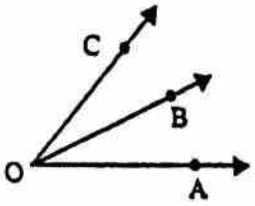
اگر زاویہ کا ایک بازو کسی نصف مستوی کے ایک کنارے پر ہو تو $0°$ اور $180°$ کے درمیان کسی بھی پیمائش کا زاویہ بنانے کے لیے صرف اور صرف ایک شعاع کھینچی جا سکتی ہے۔



اوپر دی ہوئی شکل میں شعاع $\overrightarrow{OA}$ نصف مستوی h کے ایک کنارے پر ہے۔ اب $\theta°$ کا زاویہ بنانے کے لیے جبکہ $0° < \theta° < 180°$ ، صرف ایک شعاع $\overrightarrow{OB}$ اس طرح کھینچی جا سکتی ہے کہ $\angle AOB = \theta°$

اس موضوعہ کے مطابق °0 اور °180 کا کوئی زاویہ نہیں ہے لیکن کسی زاویے کی پیمائش °0 اور °180 کے درمیان ہو سکتی ہے۔ دو زاویوں کی پیمائشوں کا مجموعہ °180 یا زائد لیکن °360 سے کم ہو سکتا ہے۔

7.3.12 متصلہ زاویے



دو زاویے متصلہ زاویے (*Adjacent Angles*) کہلاتے ہیں اگر

(i) ان کی راس مشترک ہوں

(ii) ایک بازو مشترک ہو

(iii) ان کے اندرونے کا تقاطع خالی سیٹ ہو

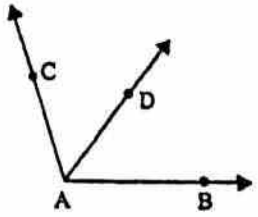
دی ہوئی شکل میں AOB∠ اور COB∠ متصلہ زاویے ہیں اس لیے کہ

(i) O ان کی مشترک راس ہے

(ii) $\overline{OB}$ ان کا مشترک بازو ہے

(iii) ان کے اندرونے کا تقاطع خالی سیٹ ہے۔

اصول موضوعہ 10. زاویوں کی جمع کا موضوعہ

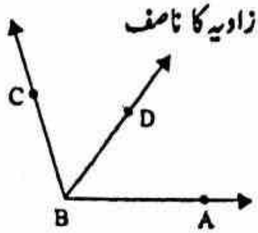


دو متصلہ زاویوں کا مجموعہ وہ زاویہ ہے جو ان کے غیر مشترک بازوؤں سے بنتا ہے۔

اس شکل میں BAD∠ اور CAD∠ دو متصلہ زاویے ہیں۔ یوں

$$m\angle BAD + m\angle CAD = m\angle BAC$$

7.3.13 زاویے کا ناصف



اگر دو متصلہ زاویے برابر ہوں تو ان کا مشترک بازو، غیر مشترک بازوں سے بننے والے زاویہ کا ناصف (*Bisector of an Angle*) کہلاتا ہے۔

اس شکل میں

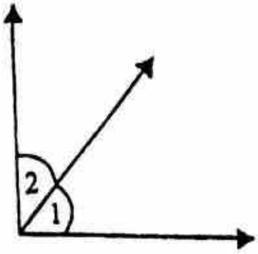
$$m\angle ABD = m\angle CBD = \frac{1}{2}m\angle ABC$$

اس لیے $\overrightarrow{BD}$ زاویہ ABC کا ناصف ہے۔ یعنی $\overrightarrow{BD}$ زاویہ ABC کو دو برابر زاویوں میں تقسیم کر دیتا ہے۔

اصول موضوعہ 11. زاویہ کا ایک اور صرف ایک ناصف کھینچا جا سکتا ہے۔

7.3.14 کمپلیمنٹری زاویے

اگر دو زاویوں کا مجموعہ °90 ہو تو وہ کمپلیمنٹری زاویے (Complementary Angles) کہلاتے ہیں۔ ہر ایک زاویہ دوسرے کا کمپلیمنٹ (Complement) کہلاتا ہے۔



مثلاً °30 اور °60 کے زاویے ایک دوسرے کے کمپلیمنٹری زاویے کہلاتے ہیں۔

اس تصویر میں چونکہ $\angle 1 + \angle 2 = 90^\circ$

اس لیے $\angle 1$ اور $\angle 2$ کمپلیمنٹری زاویے ہیں۔

7.3.15 سپلیمنٹری زاویے

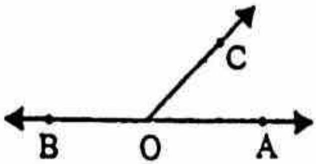
اگر دو زاویوں کا مجموعہ °180 ہے تو انہیں سپلیمنٹری زاویے (Supplementary Angles) کہا جاتا ہے۔ ان میں سے ہر ایک دوسرے کا سپلیمنٹ (Supplement) کہلاتا ہے۔

مثلاً °60 اور °120 کے زاویے یا °81 اور °99 کے زاویے سپلیمنٹری زاویے ہیں۔ °60 کا زاویہ °120 کے زاویہ کا سپلیمنٹ اور °120 کا زاویہ °60 کے زاویہ کا سپلیمنٹ ہے وغیرہ

اصول موضوعہ 12. سپلیمنٹری زاویوں کا موضوعہ

(الف) اگر دو متصلہ زاویے سپلیمنٹری زاویے ہوں تو ان کے غیر مشترک بازو ہم خط ہوتے ہیں۔

(ب) اگر دو متصلہ زاویوں کے غیر مشترک بازو ہم خط ہوں تو وہ سپلیمنٹری زاویے ہوتے ہیں۔



اوپر دی ہوئی شکل میں دو متصلہ زاویے $\angle AOC$ اور $\angle BOC$ سپلیمنٹری زاویے ہیں اس لیے ان کے غیر مشترک بازو $\overrightarrow{OA}$ اور $\overrightarrow{OB}$ ہم خط ہیں یعنی ایک ہی خط پر واقع ہیں۔

اس کے برعکس اگر $\overrightarrow{OA}$ اور $\overrightarrow{OB}$ ایک خط پر واقع ہوں تو

$$m\angle AOC + m\angle BOC = 180^\circ$$

یعنی $\angle AOC$ اور $\angle BOC$ سپلیمنٹری زاویے ہوتے ہیں۔

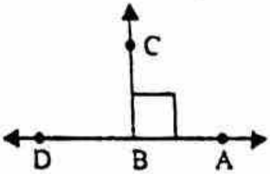
اس اصول موضوعہ کے مطابق اگر دو زاویے سپلیمنٹری ہوں تو ان کے غیر مشترک بازوں مخالف شعاعیں ہوتی ہیں۔

اوپر شکل میں $\overrightarrow{OA}$ اور $\overrightarrow{OB}$ دو مخالف شعاعیں ہیں۔

7.3.16 قائمہ زاویہ

اگر دو کمپلیمنٹری زاویوں کی پیمائش برابر ہے تو ان میں سے ہر ایک زاویہ قائمہ (*Right Angle*) کہلاتا

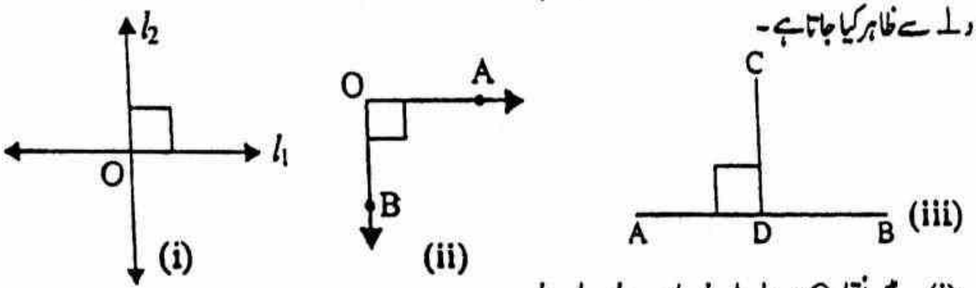
یعنی ان میں سے ہر ایک 90° کا ہوتا ہے۔ قائمہ زاویہ علامت ∟ سے ظاہر کیا جاتا ہے۔



7.3.17 عمود

دو خطوط (شعاعیں یا قطعہ خطوط) ایک دوسرے پر عمود (*Perpendiculars*) ہوں گے اگر وہ قائمہ زاویے بناتے ہوں۔

عمود ⊥ سے ظاہر کیا جاتا ہے۔



شکل (i) میں نقطہ O پر $l_1 \perp l_2$ اور $l_2 \perp l_1$

شکل (ii) میں $\overrightarrow{OA} \perp \overrightarrow{OB}$ اور $\overrightarrow{OB} \perp \overrightarrow{OA}$

شکل (iii)

میں $\overline{CD} \perp \overline{AB}$ ، $\overline{AB} \perp \overline{CD}$ ، $\overline{CD} \perp \overline{DB}$، $\overline{DB} \perp \overline{CD}$ ، $\overline{AD} \perp \overline{CD}$ اور $\overline{CD} \perp \overline{AD}$

اصول موضوعہ 13: کسی خط پر ایک نقطے سے یا خط کے باہر کسی نقطہ سے اس خط پر ایک اور صرف ایک عمود کھینچا جا سکتا ہے۔

7.3.18 زاویہ حادہ:
وہ زاویہ جس کی پیمائش 90° سے کم ہو حادہ زاویہ (*Acute angle*) کہلاتا ہے۔

7.3.19 زاویہ منفرجہ:
وہ زاویہ جس کی پیمائش 90° سے زیادہ ہو منفرجہ زاویہ (*Obtuse angle*) کہلاتا ہے۔

7.3.20 متماثل زاویے

دو زاویے جن کی پیمائش ایک ہی ہو متماثل زاویے (*Congruent angles*) کہلاتے ہیں

متماثل کے لیے علامت ≅ استعمال ہوتی ہے

واضح ہو کہ $\angle PQR \cong \angle ABC$ اور $m\angle PQR = m\angle ABC$

آپس میں مترادف بیانات ہیں

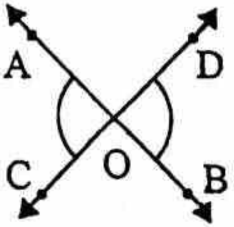
اوپر دی ہوئی تعریفوں سے مندرجہ ذیل نتائج آسانی سے اخذ کیے جاسکتے ہیں۔

(i) ہر زاویہ اپنا متماثل ہوتا ہے (ایسے متماثل کو ذاتی تماثل کہتے ہیں)۔
(ii) تمام قائمہ زاویے متماثل زاویے ہوتے ہیں۔
(iii) اگر دو زاویے کمپلیمنٹری ہیں تو وہ حادہ زاویے ہوتے ہیں۔
(iv) متماثل زاویوں کے کمپلیمنٹ زاویے متماثل ہوتے ہیں۔
(v) متماثل زاویوں کے سپلیمنٹ متماثل ہوتے ہیں۔

7.3.21 راسی متقابلہ زاویے (*Vertically Opposite Angles*)

دو زاویہ جن کے بازو مخالف شعاعوں کے دو جوڑے بناتے ہوں راسی متقابلہ زاویے (یا صرف راسی زاویے) کہلاتے ہیں۔

سامنے کی شکل میں $\overrightarrow{OA}$ اور $\overrightarrow{OB}$ مخالف شعاعوں کا ایک جوڑا ہے (یعنی AB ایک خط ہے)



اور $\overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{OD}$ مخالف شعاعوں کا ایک اور جوڑا ہے۔ (یعنی CD ایک خط ہے)

اس لیے $\angle AOC$ اور $\angle BOD$ راسی متقابلہ زاویے ہیں

اسی طرح $\angle AOD$ اور $\angle BOC$ راسی متقابلہ زاویے ہیں۔

مشق 7.1

1. مندرجہ ذیل اصطلاحات کی تعریف کیجیے اور شکل بنا کر اس کی وضاحت کیجیے۔

(i) قطعہ خط (ii) شعاع (iii) مخالف شعاعیں (iv) محدب سیٹ
(v) نصف مستوی اور اس کا کنارا (vi) زاویہ (vii) قائمہ زاویہ (viii) عمود
(ix) متماثل زاویے (x) متصلہ زاویے (xi) راسی متقابلہ زاویے

.2 مندرجہ ذیل میں فرق واضح کیجیے اور شکلوں کے ذریعہ وضاحت کیجیے۔

(i) زاویہ کا اندرونہ اور بیرونہ (ii) ہم خط اور غیر ہم خط نقاط (iii) درمیان اور پرے

(iv) حادہ اور منفرجہ زاویے (v) کمپلیمنٹری اور سپلیمنٹری زاویے

.3 استخراجی طریقہ استدلال سے آپ کیا مراد لیتے ہیں۔

.4 استخراجی مضمون جیسے علم ہندسہ کی چار خصوصیات گنوایئے (مثال دینے کی ضرورت نہیں ہے)۔

.5 بنیادی مفروضے کیا ہیں؟ اس کی کتنی قسمیں ہیں؟ مثالیں دے کر واضح کیجیے۔

.6 مندرجہ ذیل اصول موضوعات بیان کیجیے

(i) فاصلے کا موضوعہ (ii) مستوی کے بٹوارے کا موضوعہ (iii) زاویہ کی بناوٹ کا موضوعہ

(iv) زاویوں کی جمع کا موضوعہ (v) سپلیمنٹری زاویوں کا موضوعہ

-7 اگر نقطہ C نقاط A اور B کے درمیان واقع ہے تو ثابت کیجیے کہ

(i) $m\,\overline{AB} > m\,\overline{AC}$ (ii) $m\,\overline{BC} < m\,\overline{AB}$

یونٹ
8
اثباتی علم ہندسہ

8.1 خطوط اور کثیر الاضلاع سے متعلق مسائل

پچھلے یونٹ میں علم ہندسہ سے متعلق ہم بہت سی اصطلاحات سے متعارف ہوئے ہیں اور کئی اصول موضوعہ (بنیادی مفروضوں) کا مطالعہ بھی کیا ہے۔اس لیے اب ہم کچھ بیانات (مسائل) ترتیب دینے کے لیے پوری طرح لیس ہیں جنھیں استخراجی طریقہ سے ثابت کیا جائے گا۔مسائل کے ثبوت کے لیے مندرجہ ذیل چھ مراحل کا مطالعہ بہت ضروری ہے۔جنھیں ثبوت کے حصے کہا جاتا ہے۔

1. مسئلے کا دعویٰ عام

یہ مسئلے کا عمومی بیان ہوتا ہے۔عام طور پر اس کے دو حصے ہوتے ہیں۔

(i) قیاس یا شرط جو عموماً ''اگر'' سے شروع ہوتا ہے۔

(ii) نتیجہ جو عموماً ''تو'' سے شروع ہوتا ہے۔

مسئلہ: اگر دو خطوط ایک دوسرے کو قطع کرتے ہوں تو راسی متقابلہ زاویے متماثل ہوتے ہیں۔

یہاں قیاس ''اگر دو خطوط ایک دوسرے کو قطع کرتے ہوں'' ہے۔اور نتیجہ ''راسی متقابلہ زاویے متماثل ہوتے ہیں'' ہے۔

کبھی کبھی 'اگر' اور 'تو' یا ان میں سے کوئی ایک بھی استعمال نہیں ہوتا۔ مثلاً ''ایک مساوی الساقین مثلث کے دو زاویے متماثل ہوتے ہیں''۔

یا ''مساوی الساقین مثلث میں قاعدہ پر بننے والے زاویے متماثل ہوتے ہیں'' یہ دونوں مندرجہ ذیل بیان کا خلاصہ ہیں۔''اگر مثلث کے دو اضلاع متماثل ہوں تو ان کے مخالف زاویے متماثل ہوتے ہیں''۔

2. شکل

مسئلے کے دعویٰ عام کی روشنی میں ایسی شکل بنائی جاتی ہے جو نقاط، خطوط، زاویوں وغیرہ کو اس طرح اجاگر کرے کہ شرائط اور نتیجہ واضح ہو جائے۔

.3 معلوم

بنائی گئی شکل کے اعتبار سے دعویٰ کے پہلے حصے یعنی قیاس کو بطور "معلوم" لکھ لیا جاتا ہے۔ یعنی "یہ بات ہمارے علم میں ہے"۔

.4 مطلوب

بنائی گئی شکل کے اعتبار سے دعویٰ کے دوسرے حصے یعنی نتیجہ کو بطور "مطلوب" لکھ لیا جاتا ہے۔

.5 عمل

کبھی کبھی مسئلہ کو ثابت کرنے کے لیے شکل میں اضافہ کیا جاتا ہے۔ مثلاً زاویہ کی تنصیف، دیئے ہوئے دو نقاط کو ملانا یا کسی ضلع کو بڑھانا وغیرہ اس طرح کے اقدام کو عمل یا بناوٹ کہا جاتا ہے۔ یہ عمل اختیاری ہے اگر ضرورت ہو تو اس کا ذکر کیا جاتا ہے عموماً تحلیلی طریقہ (جس کا ذکر اگلے آرٹیکل میں ہے) کی مدد سے تعین ہوتا ہے کہ کیا عمل ہونا چاہیے۔

.6 ثبوت

یہ کسی مسئلہ کے ثبوت کا آخری حصہ ہوتا ہے اس میں تعریفات اصول موضوعہ، دیا ہوا مواد اور معلوم حقائق (ایسے مسائل جو ثابت کیے جا چکے ہوں) کی مدد سے دیے ہوئے مفروضے کا منطقی ثبوت دیا جاتا ہے۔

ایک نتیجہ سے دوسرا نتیجہ اخذ کرنے کی وجوہات دینا لازمی ہوتا ہے۔ عموماً دو طریقوں سے ثبوت پیش کیے جاتے ہیں۔

(i) پہلے طریقہ میں یکے بعد دیگرے وجوہات دیتے رہتے ہیں اور ساتھ ہی ساتھ نتیجہ نکالتے رہتے ہیں۔

(ii) دوسرے طریقہ میں ایک کالم میں نتائج اور دوسرے کالم میں ہر نتیجہ کے سامنے اس کی دلیل دی جاتی ہے۔

اس کتاب میں ثبوت پیش کرنے کے لیے زیادہ تر دوسرا طریقہ اختیار کریں گے۔ پرانی روایت ہے کہ ثبوت کے اختتام پر فہوالمطلوب Q.E.D یعنی (Quod Erat Demonstrandum) لکھتے ہیں۔ جس کے معنی ہیں "پس یہی ثابت کرنا تھا"۔

8.2 ثبوت کے طریقے

یہ عمومی مشاہدہ ہے کہ اساتذہ ثبوت کو تختہ سیاہ (یا سفید) پر نقل کر دیتے ہیں اور طلباء انھیں رٹ لیتے ہیں۔ اس کی وجہ سے علم ہندسہ کی تدریس کے مندرجہ ذیل دو بنیادی مقاصد فوت ہو جاتے ہیں۔

(i) منطقی طریقہ سے سوچنے کی صلاحیت میں اضافہ

(ii) غور و خوض یا دریافت یا تخلیقی صلاحیت کا پرورش پانا

کسی مسئلہ کو ثابت کرنے کیلئے طلباء کو یہ سمجھنا چاہئے کہ کس عمل یا منطقی استدلال کی ضرورت ہے۔ یہ اشد ضروری ہے۔ یہ بھی اہم ہے کہ مسئلے کے ثبوت کے لیئے ممکنہ مختلف طریقے اختیار کرنے میں طلباء کی ہمت افزائی کی جائے۔

اب ہم دو طریقہ استدلال بیان کرتے ہیں جو مسئلوں کو ثابت کرنے میں استعمال ہوتے ہیں۔

.1 تحلیلی و ترکیبی طریقہ (Analytico - Synthetic Method)

تحلیل (Analysis) کے معنیٰ ہیں عناصر یا اجزاء کو علیحدہ علیحدہ کرنا۔ تحلیل "کیا ثابت کرنا ہے" سے شروع ہوتی ہے۔

فرض کیجیے ہمیں ثابت کرنا ہے کہ بیان x صحیح ہے۔ ہم سوال پوچھتے ہیں کہ کیسے ثابت کر سکتے ہیں کہ x صحیح ہے؟ شاید جواب یہ ہے کہ "اسے ثابت کیا جاسکتا ہے اگر y صحیح ہے" پھر ہم پوچھتے ہیں کہ کیسے ثابت کر سکتے ہیں کہ y صحیح ہے؟ ہوسکتا ہے جواب یہ ہو کہ " اسے صحیح ثابت کیا جاسکتا ہے اگر بیان z صحیح ہو"

اب اگر یہ ثابت ہو جائے کہ z صحیح ہے تو گویا x بھی صحیح ہے۔

اس طرح کا استدلال اصل مسئلہ کو چھوٹے چھوٹے حصوں میں تحلیل کرنے میں مدد دیتا ہے اور یہ رہنمائی کرتا ہے کہ کیا کرنا ہے۔ اس تحلیل کے بعد ہم ترکیبی شکل میں جو کہ تحلیلی ترتیب کے الٹ ہے، ثبوت لکھتے ہیں۔ جیسے

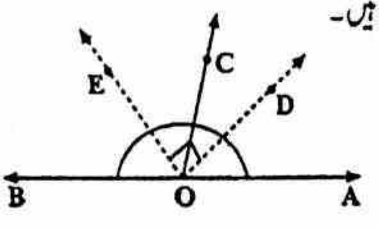
سب سے پہلے یہ ثابت کرتے ہیں کہ بیان z صحیح ہے۔

اس سے یہ ثابت کرتے ہیں بیان y صحیح ہے۔

اور پھر یہ ثابت کرتے ہیں کہ بیان x صحیح ہے۔

اس طرح کی تحلیل میں ممکن ہے تین سے زیادہ مراحل ہوں۔ مندرجہ ذیل مثالوں سے یہ نکتہ مزید واضح ہو جائے گا۔

مثال: دو متصلہ سپلیمنٹری زاویوں کے ناصف آپس میں عمود ہوتے ہیں۔



معلوم: $\overrightarrow{OD}$ اور $\overrightarrow{OE}$ بالترتیب دو سپلیمنٹری زاویوں $\angle AOC$ اور $\angle BOC$ کے ناصف ہیں۔

مطلوب: $\overrightarrow{OD} \perp \overrightarrow{OE}$

تحلیلی طریقہ (Analytic Method)

(1) ہم کیسے ثابت کر سکتے ہیں $\overrightarrow{OD} \perp \overrightarrow{OE}$؟

(a) ہم کہہ سکتے ہیں اگر $m\angle EOD = 90°$ تو $\overrightarrow{OD} \perp \overrightarrow{OE}$

(2) ہم کیسے ثابت کر سکتے ہیں $m\angle EOD = 90°$

(b) ہم کہہ سکتے ہیں اگر $m\angle COD + m\angle EOC = 90°$ تو $m\angle EOD = 90°$

(3) کیا ہم ثابت کر سکتے ہیں کہ $m\angle COD + m\angle EOC = 90°$ ؟

(c) ہم یہ ثابت کر سکتے ہیں کیونکہ

ہمیں ملا ہوا ہے: $m\angle AOC + m\angle BOC = 180°$ اس لیے ان کے نصف کا مجموعہ $90°$ ہوگا۔ یعنی

$$\frac{1}{2} m\angle AOC + \frac{1}{2} m\angle BOC = \frac{1}{2}(180°)$$

یا

$$m\angle COD + m\angle EOC = 90°$$

چونکہ تحلیل مکمل ہو چکی اب ہم ترکیبی شکل میں تحلیل کی الٹی ترتیب سے ثبوت لکھتے ہیں۔

ثبوت:

بیانات	دلائل
.1 $m\angle AOC + m\angle BOC = 180°$	.1 معلوم (دو متصلہ سپلیمنٹری زاویے)
.2 لہٰذا $\frac{1}{2} m\angle AOC + \frac{1}{2} m\angle BOC = \frac{1}{2}(180°)$	.2 مساوات کے دونوں اطراف کو $\frac{1}{2}$ سے ضرب دیا
.3 $m\angle COD + m\angle EOC = 90°$	.3 $\frac{1}{2} m\angle AOC = m\angle COD$ $\frac{1}{2} m\angle BOC = m\angle EOD$
.4 $\therefore\ m\angle EOD = 90°$	.4 زاویوں کے جمع کا موضوعہ یعنی $m\angle COD + m\angle EOC = m\angle EOD$
.5 پس $\overrightarrow{OD} \perp \overrightarrow{OE}$	.5 اگر دو شعاعوں کے درمیان زاویہ قائمہ ہو تو وہ ایک دوسرے پر عمود ہوتی ہیں۔

فہو المطلوب

نوٹ: نشانات $\therefore$ اور $\because$ سے مراد ہیں: لہٰذا اور چونکہ

مندرجہ بالا مثال سے واضح ہوتا ہے کہ تحلیل سے کسی مسئلے کے تجزیہ میں مدد ملتی ہے جس سے مسئلہ کے حل کرنے کے اقدامات کا اشارہ ملتا ہے۔ مگر ثبوت ہمیشہ ترکیبی شکل میں لکھا جاتا ہے۔ لہٰذا اس طریقے کو تحلیلی و ترکیبی طریقہ کہتے ہیں۔

.1 ثبوت میں تحلیل کی اہمیت

اگر تحلیل کے بغیر ہم ثبوت میں ترکیبی رجحان کو اپنائیں تو ہمیں کچھ حاصل نہیں ہوتا جبکہ تحلیلی رجحان ہمیں ان اقدامات کی طرف لے جاتا ہے جو ثبوت کو ترکیبی شکل میں لکھنے کے لیے ترتیب دیئے جاتے ہیں۔ مزید برآں تحلیلی رجحان غور و خوص اور تخلیقی رجحان کو پروان چڑھاتا ہے۔ جبکہ ترکیبی رجحان طلباء کو تعجب میں مبتلا کر دیتا ہے کہ فلاں قدم کیوں اٹھایا گیا۔ ثالثاً تحلیلی رجحان طلبا کو آزمائش کے ساتھ ساتھ فوری جانچ پر اکساتا ہے جبکہ ترکیبی رجحان انھیں ثبوت کو مرحلہ وار رکھنے کی طرف لے جاتا ہے۔

آرتھر شلز (Arthur Schultze) نے اپنی کتاب "ثانوی اسکولوں میں ریاضی کی تدریس" میں ان دو طریقوں کا موازنہ کرتے ہوئے یہ کہا ہے کہ تحلیل دریافت کرنے کا طریقہ ہے جبکہ ترکیب، خوبصورت اور مختصر پیش کرنے کا طریقہ ہے۔

آخر میں ایک اہم بات یہ ہے کہ ثبوت کو پیش کرنے کے لیے ترکیبی طرز طالب علم سے اس راہ کو پوشیدہ کردیتا ہے۔ جسے اس نے دریافت کیا ہوتا ہے۔ یہی وجہ ہے کہ تحلیلی وترکیبی رجحان علم ہندسہ کے طالبعلم کے لیے ایک عطیہ ہے۔

2. طریقہء برہان الخلف (Reductio-ad-Absurdum Method)

طریقہء برہان الخلف اقلیدس کی کتاب "Elements" میں موجود ہے۔

اس طریقے میں ثبوت کا نمونہ مندرجہ ذیل ہے۔

(i) ہم اصول "p کا نتیجہ q ہے" ثابت کرنا چاہتے ہیں۔

(ii) ہم کہتے ہیں 'q' صحیح ہے یا '$\overline{q}$' صحیح ہے" [$\overline{q}$ سے مراد ہے "q نہیں"]

(iii) ہم فرض کرتے ہیں کہ $\overline{q}$ صحیح ہے۔

(iv) ہم ثابت کرتے ہیں کہ $\overline{q}$ ہمراہ p ایک تضاد پیدا کرتا ہے۔

(v) اگر (iv) میں مذکورہ ثبوت فراہم کرنے میں ہم کامیاب ہوجائیں تو کہیں گے کہ q ہی حقیقی متبادل ہے۔

(vi) پس طریقہء برہان الخلف سے p کا نتیجہ q ہے۔

طریقہ برہان الخلف کی بنیاد قوانین ارسطو پر ہے، جنھیں ہم یوں بیان کرسکتے ہیں:

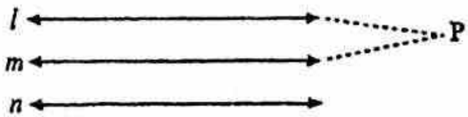
I جو ہے ، ہے (قانون ذاتی)

II کوئی چیز ہے یا نہیں ہے (قانون اخراج وسط)

III یہ ناممکن ہے کہ کوئی شے بیک وقت ہو بھی اور نہ بھی ہو۔ (قانون تضاد)

ذیل میں ایک مثال کے ذریعہ اوپر دیتے ہوئے قوانین اور ان کے استعمال کے طریقے کی وضاحت کی جاتی ہے۔

مثال: اگر دو خطوط ایک اور خط کے متوازی ہوں تو وہ آپس میں متوازی ہوں گے۔



معلوم : $m \parallel n$ اور $l \parallel m$ ... (p)

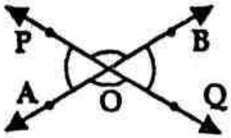
مطلوب : $l \parallel m$ ... (q)

ثبوت: فرض کیجیے خطوط l اور m متوازی نہیں ہیں ... $(\overline{q})$
اس لیے ایک دوسرے کو کسی نقطہ (مثلاً P) پر قطع کریں گے۔
یوں دو قاطع خطوط l اور m ایک دوسرے خط n کے متوازی ہیں۔ جو پلے فیئر (Play fair's Axiom) کے اصول موضوعہ "دو قاطع خطوط کسی تیسرے خط کے متوازی نہیں ہو سکتے" کی ضد ہے۔
پس ہمارا مفروضہ مہمل ہے اس لیے غلط ہے۔
نتیجتاً یہ بیان کہ $l \parallel m$ صحیح ہے۔

فہو المطلوب

مسئلہ 1

اگر دو خطوط قطع کریں تو راسی متقابلہ زاویے متماثل ہوتے ہیں۔



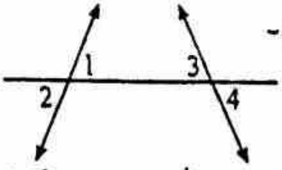
معلوم: دو خطوط $\overleftrightarrow{AB}$ اور $\overleftrightarrow{PQ}$ نقطہ O پر قطع کرتے ہیں۔
مطلوب: $\angle AOQ \cong \angle POB$ اور $\angle BOQ \cong \angle AOP$
ثبوت:

بیانات	دلائل
.1 $m\angle POB + m\angle AOP = 180°$	.1 دو متصلہ زاویوں کے غیر مشترک بازو $\overrightarrow{OA}$، $\overrightarrow{OB}$ ہم خط ہیں۔ (سپلیمنٹری زاویوں کا موضوعہ)
.2 $m\angle AOP + m\angle AOQ = 180°$	.2 دو متصلہ زاویوں کے غیر مشترک بازو ہم خط ہیں۔ (سپلیمنٹری زاویوں کا موضوعہ)
.3 $m\angle POB + m\angle AOP = m\angle AOP + m\angle AOQ$	.3 مساوات کی متعدی خاصیت (دو مقداریں ایک ہی مقدار کے برابر ہیں یعنی 180°)
.4 $m\angle POB = m\angle AOQ$	.4 $m\angle AOP$ کی دونوں طرف تنسیخ کرنے سے
.5 یا $\angle POB \cong \angle POQ$	.5 اگر دو زاویے پیمائش میں برابر ہیں تو وہ متماثل ہیں۔
.6 اسی طرح ثابت کیا جا سکتا ہے کہ $\angle AOP \cong \angle BOQ$	.6 مندرجہ بالا طریقہ سے

فہو المطلوب

مشق 8.1

1. مسئلہ 1 میں دی ہوئی شکل میں اگر $m\angle BOQ = 70°$ تو دوسرے زاویوں کی پیمائش معلوم کیجیے۔



2. 30° پر قطع کرتے ہوئے دو خطوط کھینچیے اور بقیہ زاویوں کی پیمائش معلوم کیجیے۔

3. اس شکل میں $\angle 3 \cong \angle 1$ تو
ثابت کیجیے کہ $\angle 4 \cong \angle 2$

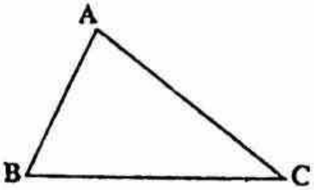
4. چار شعاعوں کا سرا مشترک ہے۔ جب کہ متقابلہ زاویوں کے جوڑے آپس میں متماثل ہیں۔ ثابت کیجیے کہ یہ مخالف شعاعوں کے یہ دو اور صرف دو جوڑے ہیں (اور اس لیے قاطع خطوط ہیں) [عکس مسئلہ 1]

5. دو متصلہ سپلیمنٹری زاویوں کے ناصف ایک دوسرے پر عمود ہوتے ہیں۔

6. اگر دو زاویوں کے ناصف ایک دوسرے پر عمود ہوں تو وہ زاویے سپلیمنٹری زاویے ہوتے ہیں۔

7. اگر دو متماثل زاویوں جن کے راس مشترک ہوں کے ناصف دو مخالف شعاعیں ہوں تو زاویوں کے ضلعے دو قاطع خطوط ہوتے ہیں۔

8.3 مثلث یا تکون

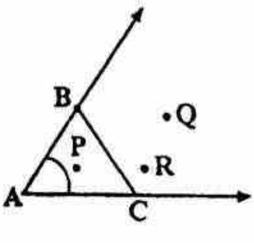


1. قطعۂ خطوط $\overline{AB}$ ، $\overline{BC}$ اور $\overline{CA}$ کا اتصال ایک مثلث (*Triangle*) ABC کہلاتا ہے جبکہ A ، B اور C غیر ہم خط نقاط ہوں۔ مثلث ABC کو ΔABC لکھا جاتا ہے۔

2. نقاط A ، B اور C مثلث ABC کے راس کہلاتے ہیں۔

3. قطعہء خطوط $\overline{AB}$ ، $\overline{BC}$ اور $\overline{CA}$ مثلث ABC کے اضلاع کہلاتے ہیں۔

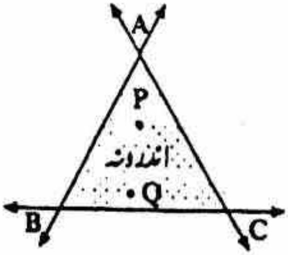
4. ΔABC میں تین زاویے $\angle BAC$ ، $\angle ABC$ اور $\angle ACB$ ہوتے ہیں۔ انھیں ΔABC کے زاویے کہا جاتا ہے۔ انھیں بالترتیب $\angle A$ ، $\angle B$ اور $\angle C$ سے بھی ظاہر کیا جاتا ہے۔



حالانکہ ایک مثلث میں تین زاویے ہوتے ہیں مگر یہ زاویے کلی طور پر مثلث کے اندر شامل نہیں ہوتے۔ ان زاویوں کو دکھانے کے لیے زاویوں کے بازو بڑھائے جا سکتے ہیں۔ مثلاً ΔABC میں $\angle A$ کو کلی طور پر دکھانے کے لیے اس کے بازو $\overrightarrow{AB}$ اور $\overrightarrow{AC}$ بڑھائے گئے ہیں۔

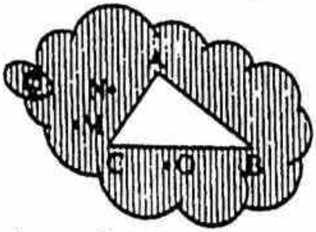
نقاط P ، Q ، R کو دیکھیے تینوں نقاط $\angle A$ کے اندرونے میں ہیں۔ لیکن نقاط Q اور R مثلث ABC کے اندرونے میں نہیں ہیں۔

5. مثلث کا اندرونہ



ان نقاط کا سیٹ جو مثلث کے تینوں زاویوں ∠A، ∠B اور ∠C کے اندرونے میں ہوں مثلث کا اندرونہ (*Interior of a Triangle*) کہلاتا ہے۔ شکل کا نقطہ دار حصہ ΔABC کا اندرونہ ہے۔ نقاط P اور Q دونوں ∠A، ∠B اور ∠C کے اندرونے میں ہیں۔

6. مثلث کا بیرونہ

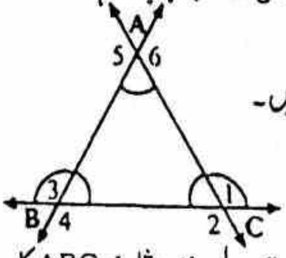


ان نقاط کا سیٹ جو نہ مثلث پر ہوں اور نہ اس کے اندرونہ میں ہوں وہ مثلث کا بیرونہ (*Exterior of a Triangle*) کہلاتے ہیں۔
اس شکل میں سایہ دار لامتناہی حصہ ΔABC کا بیرونہ ہے۔ یہاں نقطہ M حالانکہ ∠ABC کے اندرونہ میں ہے مگر ∠A اور ∠C کے اندرونہ میں نہیں ہے اس لیے ΔABC کے بیرونہ میں ہے۔ یہی معاملہ N اور O کے ساتھ ہے۔ جو کہ ΔABC کے بیرونہ میں ہیں۔

7. مثلثی خِطہ یا مثلثی رقبہ

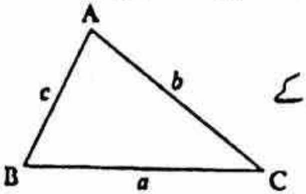
مثلث اور اس کے اندرونہ کے اتصال کو مثلثی خِطہ یا مثلثی رقبہ (*Triangales Region or Area*) کہا جاتا ہے۔

8. اندرونی اور بیرونی زاویے



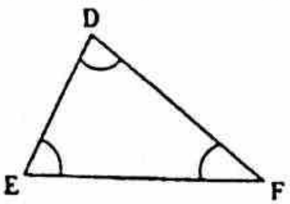
∠A، ∠B اور ∠C مثلث ABC کے اندرونی زاویے (*Interior Angles*) ہیں۔
ایسا زاویہ جو کسی اندرونی زاویے کا متصلا اور سپلیمنٹری زاویہ ہو اسے مثلث کا بیرونی زاویہ (*Exterior Angle*) کہتے ہیں۔
اس شکل میں ∠1، ∠ACB (∠C اندرونی زاویہ) کا متصلا اور سپلیمنٹری زاویہ ہے اس لیے ∠1 مثلث ABC کا بیرونی زاویہ ہے۔ اس طرح سے ∠2، ∠3، ∠4، ∠5، ∠6 مثلث ABC کے بیرونی زاویے ہیں۔

9. متقابلہ زاویے اور متقابلہ اضلاع

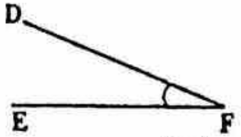


ΔABC میں ∠A، ضلع $\overline{BC}$ کے متقابل ہے۔ اور ضلع $\overline{BC}$ زاویہ A کے متقابل ہے۔ اسی طرح ∠B اور $\overline{AC}$ ایک دوسرے کے متقابل ہیں۔
اور ∠C اور $\overline{AB}$ ایک دوسرے کے متقابل ہیں۔

10. درمیانی زاویہ اور درمیانی ضلع



مثلث DEF میں ∠D ضلعوں $\overline{DE}$ اور $\overline{DF}$ کا درمیانی زاویہ ہے۔
∠E ضلعوں $\overline{ED}$ اور $\overline{EF}$ کا درمیانی زاویہ ہے۔

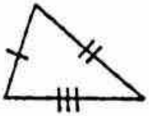


F کے ضلعوں $\overline{FE}$ اور $\overline{FD}$ کا درمیانی زاویہ ہے۔

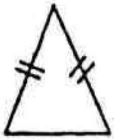
اسی مثلث DEF میں $\overline{EF}$ زاویوں E کے اور F کے کا درمیانی ضلع ہے۔

اسی طرح $\overline{DE}$ درمیانی ضلع ہے D کے اور E کے کا اور D کے اور F کے کا $\overline{DF}$ درمیانی ضلع ہے۔

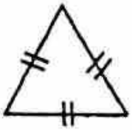
8.4 مثلث کی اقسام



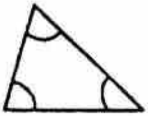
1. **مختلف الاضلاع مثلث** : ایسا مثلث جس کے تینوں اضلاع متماثل نہ ہوں، مختلف الاضلاع مثلث کہلاتا ہے۔



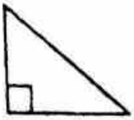
2. **متماثل الساقین مثلث** : ایسا مثلث جس کے دو اضلاع متماثل ہوں۔ متماثل الساقین مثلث کہلاتا ہے۔



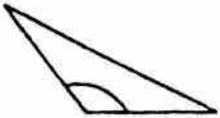
3. **مساوی الاضلاع مثلث**: ایسا مثلث جس کے تینوں اضلاع متماثل ہوں۔ مساوی الاضلاع مثلث کہلاتا ہے۔



4. **حادۃ الزاویہ مثلث** : ایسا مثلث جس کے تینوں زاویے حادہ ہوں، حادۃ الزاویہ مثلث یا حادہ زاویہ مثلث کہلاتا ہے۔



5. **قائمۃ الزاویہ مثلث**: ایسا مثلث جس کا ایک زاویہ قائمہ ہو، قائمۃ الزاویہ مثلث یا قائمہ زاویہ مثلث کہلاتا ہے۔

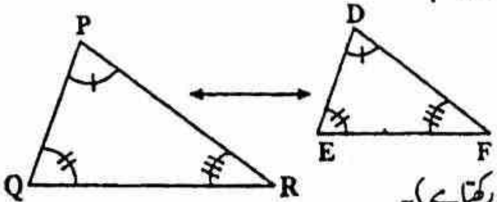


6. **منفرجۃ الزاویہ مثلث**: ایسا مثلث جس کا ایک زاویہ منفرجہ ہو، منفرجۃ الزاویہ مثلث یا منفرجہ زاویہ مثلث کہلاتا ہے۔

8.5 دو مثلثوں یا دو کثیر الاضلاع میں ایک۔ایک مطابقت

ہر مثلث کے تین اضلاع، تین راس اور تین زاویے ہوتے ہیں۔اس لیے یہ ہمیشہ ممکن ہے کہ ان کے زاویوں، ضلعوں اور راس میں ایک۔ایک مطابقت قائم کی جائے۔

علامت " $\longleftrightarrow$ " ایک۔ایک مطابقت کے لیے استعمال ہوتی ہے۔



$\Delta PQR \longleftrightarrow \Delta DEF$ کا مطلب ہے:

$P \longleftrightarrow D$ (نقطہ P نقطہ D سے مطابقت رکھتا ہے)

$Q \longleftrightarrow E$ اور $R \longleftrightarrow F$

پس $\angle P \longleftrightarrow \angle D$ ($\angle P$، $\angle D$ سے مطابقت رکھتا ہے)۔

$\angle Q \longleftrightarrow \angle E$ اور $\angle R \longleftrightarrow \angle F$

اسی طرح $\overline{PQ} \leftrightarrow \overline{DE}$ (ضلع $\overline{PQ}$ ضلع $\overline{DE}$ سے مطابقت رکھتا ہے)

$\overline{QR} \leftrightarrow \overline{ER}$ اور $\overline{PR} \leftrightarrow \overline{DF}$

دو مثلثوں ΔPQR اور ΔDEF میں چھ مختلف طریقوں سے مطابقت قائم کی جاسکتی ہے جو مندرجہ ذیل ہیں۔

(i) $\Delta PQR \leftrightarrow \Delta DEF$ (ii) $\Delta PQR \leftrightarrow \Delta DFE$ (iii) $\Delta PQR \leftrightarrow \Delta EDF$

(iv) $\Delta PQR \leftrightarrow \Delta EFD$ (v) $\Delta PQR \leftrightarrow \Delta FDE$ (iv) $\Delta PQR \leftrightarrow \Delta FED$

اسی طرح Q,P اور R کی ترتیب تبدیل کرتے ہوئے اور ΔDEF جوں کا توں رکھتے ہوئے یہی چھ مطابقتیں حاصل کی جاسکتی ہے۔ مثلاً $\Delta QPR \leftrightarrow \Delta EDF$ اور $\Delta PQR \leftrightarrow \Delta DEF$ ایک ہی مطابقت ہیں کیونکہ دونوں مطابقتوں میں نقطہ P نقطہ D سے Q، E سے اور R، F سے مطابقت رکھتا ہے۔

دو مثلثوں میں (1-1) مطابقت قائم کرنے کا آسان طریقہ یہ ہے کہ ایک مثلث کے دو راسوں کی مطابقت دوسرے کے دو راسوں سے قائم کی جائے تو تمام ضلعوں اور راسوں میں خود بہ خود مطابقت قائم ہو جائے گی۔

اسی طریقے سے دو چوکور یا مخمس یا مسدس وغیرہ میں بھی (1-1) مطابقت قائم کی جاسکتی ہے۔

8.6 مثلثوں کا تماثل (*Congruence of Triangles*)

دو مثلث متماثل کہلاتے ہیں اگر ان کے متناظرہ ضلعے اور زاویے متماثل ہوں مثلاً اگر ΔABC اور ΔPQR اس طرح ہوں کہ

(i) $\Delta ABC \leftrightarrow \Delta PQR$

اور (ii) $\angle A \cong \angle P$, $\angle B \cong \angle Q$ $\angle C \cong \angle R$ یعنی متناظرہ زاویے متماثل ہیں اور

(iii) $\overline{AB} \cong \overline{PQ}$, $\overline{BC} \cong \overline{QR}$ اور $\overline{AC} \cong \overline{PR}$ یعنی متناظرہ ضلعے متماثل ہیں۔

تو مثلث متماثل ہیں اور علامت میں لکھا جاتا ہے: $\Delta ABC \cong \Delta PQR$ اور ہم کہتے ہیں $\Delta ABC \leftrightarrow \Delta PQR$ ایک تماثل ہے۔

نوٹ 1. اگر دو مثلثوں کی ایک مطابقت متماثل ہو تو یہ ضروری نہیں کی کوئی دوسری مطابقت بھی تماثل ہو۔

نوٹ 2. ہر مثلث خود اپنا متماثل ہوتا ہے۔ اس تماثل کو مثلثوں کا ذاتی تماثل (*Identity Congruence*) کہتے ہیں۔

مثلاً $\Delta ABC \cong \Delta ABC$

نوٹ 3. $\Delta ABC \cong \Delta PQR \Rightarrow \Delta PQR \cong \Delta ABC$ (تماثل کی خاصیت تشاکل)

نوٹ 4. اگر $\Delta ABC \cong \Delta DEF$ اور $\Delta DEF \cong \Delta PQR$ تو $\Delta ABC \cong \Delta PQR$ (تماثل کی خاصیت متعدیت)

نوٹ 5. اگر دو مثلثیں متماثل ہوں تو ان کے متناظرہ زاویے اور ضلعے متماثل ہوتے ہیں۔

8.7 دیگر کثیر الاضلاع میں تماثل

دو کثیر الاضلاع متماثل کہلاتے ہیں اگر ان کے متناظرہ زاویے اور ضلعے متماثل ہوں۔ مثلاً اگر PQRS چوکور $\cong$ ABCD چوکور

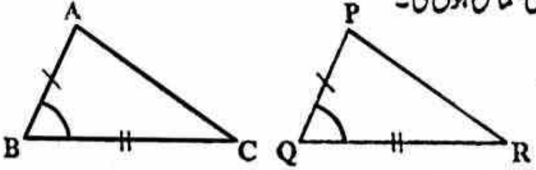
تو $\angle A \cong \angle P$, $\angle B \cong \angle Q$, $\angle C \cong \angle R$, $\angle D \cong \angle S$

اور $\overline{AB} \cong \overline{PQ}$, $\overline{BC} \cong \overline{QR}$, $\overline{CD} \cong \overline{RS}$, $\overline{DA} \cong \overline{SP}$

اس طریقہ سے دو مخمس یا مسدس وغیرہ میں تماثل قائم کیا جا سکتا ہے۔

8.8 اصول موضوعہ 14: ضلع - زاویہ - ضلع موضوعہ (ض-ز-ض موضوعہ)

اگر دو مثلثوں کی دی ہوئی مطابقت میں ایک مثلث کے دو اضلاع اور ان کا درمیانی زاویہ اور ان سے مطابقت رکھنے والی دوسری مثلث کے دو اضلاع اور ان کا درمیانی زاویہ متماثل ہوں تو مثلثیں متماثل ہوں گی۔

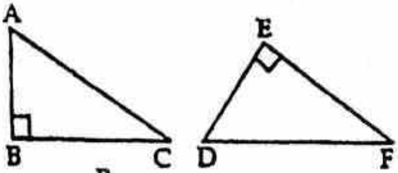


$\Delta ABC \leftrightarrow \Delta PQR$ میں

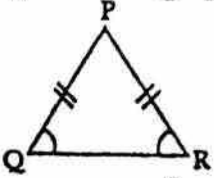
اگر $\overline{AB} \cong \overline{PQ}$, $\angle B \cong \angle Q$ اور $\overline{BC} \cong \overline{QR}$

تو $\Delta ABC \cong \Delta PQR$

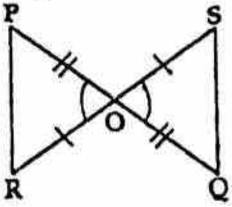
مشق 8.2



1. مثلثوں ABC اور DEF کی تمام چھ مطابقتیں تحریر کیجیے۔
اور وہ مطابقت بتایئے جو تماثل ہو۔



2. دیے ہوئے متماثل الساقین مثلث میں $\overline{PQ} \cong \overline{PR}$ اور $\angle R \cong \angle Q$ ہیں۔
کون سی مطابقتیں ذاتی تماثل ہیں تحریر کیجیے۔



3. متصلہ شکل میں $\overline{PQ}$ اور $\overline{RS}$ کا وسطی نقطہ O ہے ثابت کیجیے کہ $\overline{PR} \cong \overline{QS}$ اور $\angle Q \cong \angle P$ [اشارہ: اصول موضوعہ ض۔ز۔ض کی مدد سے ثابت کیجیے کہ $\Delta POR \cong \Delta QOS$]

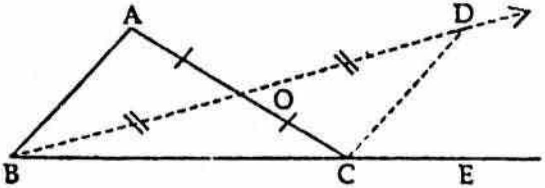
4. ایک متماثل الساقین مثلث میں زاویہ راس (متماثل الاضلاع کا درمیانی زاویہ) کا ناصف تیسرے ضلع (قاعدہ) کا عمودی ناصف ہوتا ہے۔

5. ثابت کیجیے کہ اگر ایک مثلث کا ارتفاع قاعدہ کی تنصیف کرتا ہے تو مثلث متماثل الساقین ہے (سوال 4 کا عکس)۔

6. ثابت کیجیے کہ ایک مستطیل کے وتر متماثل ہوتے ہیں۔

مسئلہ 2

اگر ایک مثلث کا ایک ضلع بڑھایا جائے تو اس طرح بننے والا بیرونی زاویہ پیمائش میں متقابلہ اندرونی زاویوں میں سے ہر ایک سے بڑا ہوتا ہے۔



معلوم: ΔABC جس میں $\angle ACE$ بیرونی زاویہ ہے۔

مطلوب: $m\angle ACE > m\angle A$ اور $m\angle ACE > m\angle B$

عمل: فرض کیا $\overline{AC}$ کا وسطی نقطہ O ہے $\overrightarrow{BO}$ کھینچیے اور نقطہ D تک بڑھایئے۔
اس طرح کہ $\overline{BO} \cong \overline{OD}$ ، اب D کو C سے ملایئے۔

ثبوت:

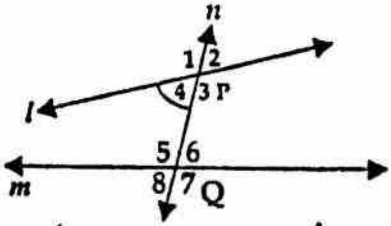
بیانات	دلائل
.1 $\Delta AOB \leftrightarrow \Delta COD$ میں	.1
(i) $\overline{AO} \cong \overline{CO}$	(i) عمل
(ii) $\angle AOB \cong \angle COD$	(ii) راسی زاویے (مسئلہ 1)
(iii) $\overline{BO} \cong \overline{DO}$	(iii) عمل
.2 $\therefore \Delta AOB \cong \Delta COD$	.2 ض۔ز۔ض موضوعہ
.3 $\therefore m\angle A = m\angle OCD$	.3 مثلثوں کے تماثل کی رو سے
.4 لیکن $m\angle ACE = m\angle OCD + m\angle DCE$	.4 زاویوں کی جمع کا موضوعہ
.5 $\therefore m\angle ACE > m\angle OCD$	.5 کل جز سے بڑا ہوتا ہے
.6 $\therefore m\angle ACE > m\angle A$	.6 $m\angle OCD = m\angle A$ (3 کی رو سے)
.7 اسی طرح $m\angle ACE > m\angle B$	.7 مندرجہ بالا طریقے سے

فہو المطلوب

نتیجہ صریح 1. اگر کسی مثلث کا ایک زاویہ قائمہ ہو تو باقی دو زاویے حادہ ہوں گے۔

نتیجہ صریح 2. کسی نقطہ سے جو خط پر نہ ہو ایک اور صرف ایک عمود کھینچا جا سکتا ہے۔ (اصول موضوعہ 13)

8.9 خط قاطع، اندرونی اور بیرونی زاویے



دی ہوئی شکل میں خط n خط قاطع (Transversal) کہلاتا ہے۔
جو دو خطوط l اور m کو بالترتیب P اور Q پر قطع کرتا ہے اور یوں آٹھ زاویے بناتا ہے۔

دونوں نقطۂ تقاطع P اور Q، $\angle 4$ کے ایک بازو پر واقع ہیں ایسے زاویے کو اندرونی زاویہ (Interior Angles) کہا جاتا ہے۔ اسی طرح $\angle 3$، $\angle 5$، $\angle 6$ بھی اندرونی زاویے ہیں۔ اس کے برخلاف $\angle 1$، $\angle 2$، $\angle 7$، $\angle 8$ بیرونی زاویے (Exterior Angles) ہیں اس لیے کہ ان کے کسی بھی بازو پر صرف ایک نقطۂ تقاطع واقع ہے۔

مزید یہ کہ $\angle 8$، $\angle 5$، $\angle 4$، $\angle 1$ خط قاطع n کے ایک ہی طرف ہیں۔ جبکہ $\angle 7$، $\angle 6$، $\angle 3$، $\angle 2$ دوسری طرف ہیں۔

8.10 متبادلہ اندرونی زاویے

دو ایسے اندرونی زاویے جن کے:

(i) راس مختلف ہوں

(ii) اندرونے خط قاطع کے مخالف اطراف میں ہوں۔

متبادلہ اندرونی زاویے، یا صرف متبادلہ زاویے (Alternate Interior Angles) کہلاتے ہیں۔ مثلاً $\angle 3$ اور $\angle 5$، $\angle 4$ اور $\angle 6$ متبادلہ زاویوں کے جوڑے ہیں۔

8.11 متناظرہ زاویے

دو ایسے اندرونی زاویے جن کے:

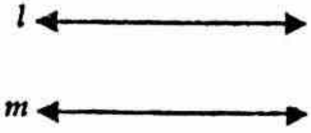
(i) راس مختلف ہوں

(ii) اندرونے خط قاطع کے ایک ہی طرف ہوں۔

(iii) ان میں ایک اندرونی اور دوسرا بیرونی زاویہ ہو۔

متناظرہ زاویے کہلاتے ہیں۔ مثلاً $\angle 1$ اور $\angle 5$، $\angle 2$ اور $\angle 6$، $\angle 3$ اور $\angle 7$، $\angle 4$ اور $\angle 8$ متناظرہ زاویوں کے چار جوڑے ہیں۔

8.12 متوازی خطوط



دو خطوط متوازی کہلاتے ہیں اگر

(i) وہ ہم مستوی ہوں

(ii) ایک دوسرے کو قطع نہ کرتے ہوں

متوازی خطوط '||' سے ظاہر کیے جاتے ہیں۔ $l \parallel m$ سے مراد l اور m متوازی ہیں۔

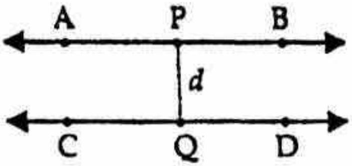
نوٹ:

1. اگر دو خطوط ایک ہی مستوی میں واقع ہوں تو وہ ایک دوسرے کو قطع کریں گے یا وہ قطع نہیں کریں گے اگر وہ قطع نہ کریں تو وہ متوازی ہوں گے۔

2. اگر دو غیر متوازی خطوط مختلف مستویوں میں واقع ہوں اور قطع نہ کرتے ہوں تو وہ منحرف خطوط (Skew Lines) کہلاتے ہیں

3. قطعہ خطوط یا شعاعیں اگر متوازی خطوط پر واقع ہوں تو متوازی ہوں گے۔

4. اگر $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD}$ تو ایک خط کے کسی نقطہ سے دوسرے خط تک کا عمودی فاصلہ متوازی خطوط کا درمیانی فاصلہ کہلاتا ہے۔

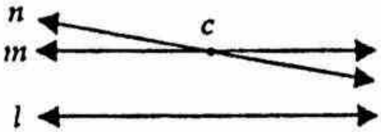


5. کسی بھی نقطے پر متوازی خطوط کا درمیانی فاصلہ یکساں ہوتا ہے۔

8.13 اصولِ موضوعہ 15: متوازی خطوط کا موضوعہ

کسی خط سے باہر کسی نقطہ سے اس کے متوازی صرف اور صرف ایک ہی خط کھینچا جا سکتا ہے۔

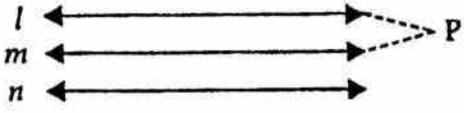
اس اصول موضوعہ کو یوں بھی بیان کیا جاتا ہے۔



''دو متقاطع خطوط ایک ہی خط کے متوازی نہیں ہو سکتے'' (پلے فیئر کا موضوعہ)

اوپر دی ہوئی شکل میں اگر $l \parallel n$ تو m, l کے متوازی نہیں ہو سکتا اور اگر $l \parallel m$ تو خط n خط l کے متوازی نہیں ہو سکتا۔ یا دونوں متوازی نہیں ہوتے یعنی کسی بیرونی نقطہ C سے صرف ایک ہی خط l کے متوازی کھینچا جا سکتا ہے۔

اب ثابت کرتے ہیں کہ: اگر دو خطوط کسی تیسرے خط کے متوازی ہوں تو وہ دونوں ایک دوسرے کے متوازی ہوں گے۔



معلوم: $l \parallel n$ اور $m \parallel n$

مطلوب: $l \parallel m$

ثبوت: اگر l اور m متوازی نہیں ہیں تو فرض کیا وہ نقطہ P پر قطع کریں گے۔

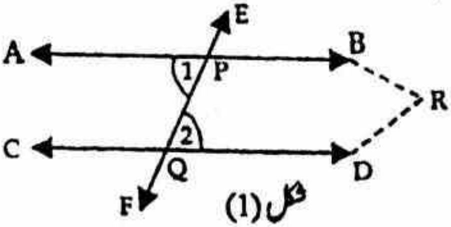
اس طرح دو متقاطع خطوط l اور m ایک تیسرے خط n کے متوازی ہیں جو کہ پلے فیئر کے موضوعہ خلاف ہے۔ اس لیے یہ مفروضہ کہ l اور m قطع کرتے ہیں غلط ہے۔

پس $l \parallel m$

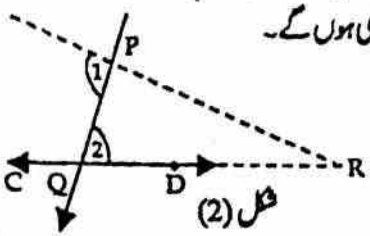
فہو المطلوب

مسئلہ 3

اگر ایک خط قاطع دو ہم مستوی خطوط کو اس طرح قطع کرتا ہے کہ ان سے بننے والے دو متبادلہ زاویے متماثل ہوں تو وہ دونوں خطوط متوازی ہوں گے۔



شکل (1)



شکل (2)

معلوم: $\overleftrightarrow{AB}$ اور $\overleftrightarrow{CD}$ دو ہم مستوی خطوط ہیں اور خط قاطع $\overleftrightarrow{EF}$ ان کو بالترتیب نقاط P اور Q پر اس طرح قطع کرتا ہے کہ $\angle 2 \cong \angle 1$

مطلوب: $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD}$

ثبوت: اگر $\overleftrightarrow{AB}$ اور $\overleftrightarrow{CD}$ متوازی نہیں ہیں تو چونکہ ہم مستوی ہیں یقیناً کسی نقطہ (فرض کیا R پر) قطع کریں گے۔
اور PQR ایک مثلث بنے گا جیسا کہ شکل 2 میں دکھایا گیا ہے۔

بیانات	دلائل
.1 ΔPQR میں $\angle 1$ بیرونی زاویہ ہے اور $\angle 2$ متقابلہ اندرونی زاویہ ہے	.1 تعریف کی رو سے
.2 $\therefore\ m\angle 1 > m\angle 2$	.2 مسئلہ 2
.3 لیکن $m\angle 1 = m\angle 2$	.3 معلوم
.4 بیان 2 اور 3 بیک وقت درست نہیں ہو سکتے۔	.4 خاصیتِ ثلاثی
.5 پس $m\angle 1 = m\angle 2$ صحیح ہے اور $\overleftrightarrow{AB}$ اور $\overleftrightarrow{CD}$ قطع نہیں کرتے	.5 مفروضہ غلط ہے۔
.6 اس لیے $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD}$	.6 کیونکہ خطوط ہم مستوی ہیں اور قطع نہیں کرتے۔

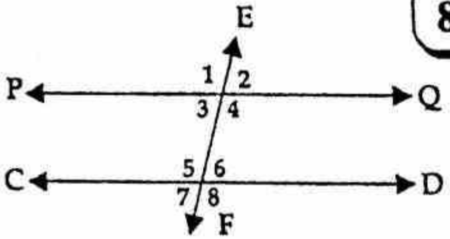
فہو المطلوب

نتیجہ صریح 1. اگر ایک خط قاطع دو ہم مستوی خطوط کو اس طرح قطع کرتا ہے کہ متناظرہ زاویوں کے جوڑے متماثل ہیں تو دونوں خطوط متوازی ہیں۔

نتیجہ صریح 2. اگر ایک خط قاطع دو ہم مستوی خطوط کو اس طرح قطع کرتا ہے کہ خط قاطع کے ایک ہی طرف کے اندرونی زاویے سپلیمنٹری ہوں تو وہ خطوط متوازی ہیں۔

نتیجہ صریح 3. ایک مستوی میں اگر ایک خط دو خطوط پر عمود ہے تو دونوں خطوط متوازی ہیں۔

مشق 8.3



.1 کیا $\overleftrightarrow{PQ} \parallel \overleftrightarrow{CD}$ ہے؟ اگر:

(i) $m\angle 3 = 70°$ اور $m\angle 6 = 70°$

(ii) $m\angle 4 = 100°$ اور $m\angle 5 = 100°$

(iii) $m\angle 1 = 110°$ اور $m\angle 5 = 110°$

(iv) $m\angle 4 = 120°$ اور $m\angle 6 = 60°$

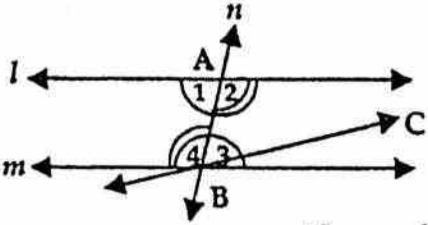
.2 اگر قطعہ خطوط $\overline{AC}$ اور $\overline{BD}$ ایک دوسرے کی تنصیف اپنے نقطہ تقاطع پر کرتے ہیں تو ثابت کیجیے کہ $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ اور $\overline{BC} \parallel \overline{AD}$

.3 ΔABC میں نقاط D اور E بالترتیب $\overline{AB}$ اور $\overline{AC}$ کے وسطی نقاط ہیں اگر $\overline{DE}$ کو F تک اس طرح بڑھایا جائے کہ $\overline{EF} \cong \overline{ED}$ تو ثابت کیجیے کہ $\overline{CF} \parallel \overline{AB}$ اور $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$

مسئلہ 4

(مسئلہ 3 کا عکس)

اگر ایک خط قاطع دو متوازی خطوط کو قطع کرے تو اس طرح بننے والے متبادلہ زاویے متماثل ہوں گے۔



معلوم: $l \parallel m$ اور خط n ان کو بالترتیب نقاط A اور B پر قطع کرتا ہے۔

مطلوب: $\angle 3 \cong \angle 1$ اور $\angle 4 \cong \angle 2$

ثبوت: فرض کیا $\angle 3 \not\cong \angle 1$ لیکن $\angle ABC \cong \angle 1$ جبکہ $\overleftrightarrow{BC}$, m پر واقع نہیں ہے۔

بیانات	دلائل
.1 چونکہ $\angle ABC \cong \angle 1$	.1 مفروضہ
.2 $\therefore\ l \parallel \overleftrightarrow{BC}$	.2 $\angle 1$ اور $\angle ABC$ متماثل ہیں (مسئلہ 3)
.3 لیکن $l \parallel m$	.3 معلوم
.4 پس l دو متقاطع خطوط m اور $\overleftrightarrow{BC}$ کے متوازی ہے جو ناممکن ہے۔	.4 پلے فیئر کا موضوعہ
.5 $\therefore\ \angle 1 \cong \angle 3$	.5 یہ مفروضہ کہ $\angle ABC \cong \angle 1$ مہمل نتیجہ دیتا ہے
.6 اسی طرح $\angle 4 \cong \angle 2$	.6 مندرجہ بالا طریقہ سے فہوالمطلوب

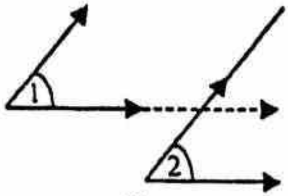
نتیجہ مسئلہ 1. اگر خط قاطع دو متوازی خطوط کو قطع کرتا ہو تو متناظرہ زاویوں کا ہر جوڑا متماثل ہوتا ہے۔

نتیجہ مسئلہ 2. اگر دو متوازی خطوط کو ایک خط قاطع قطع کرتا ہے تو خط قاطع کے ایک ہی طرف کے اندرونی زاویے سپلیمنٹری ہوتے ہیں۔

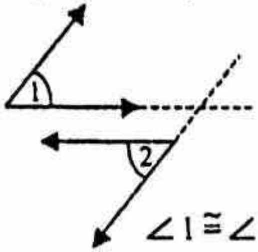
نتیجہ مسئلہ 3. ایک مستوی میں اگر کوئی خط دو متوازی خطوط میں سے کسی ایک پر عمود ہو تو وہ دوسرے خط پر بھی عمود ہوگا۔

نتیجہ مسئلہ 4. ایک مستوی میں اگر ایک زاویے کے دونوں بازو دوسرے زاویے کے دونوں بازوؤں کے متوازی ہوں اس طرح کہ

(I) سمت ایک ہی ہو **(II)** یا سمت مخالف ہو تو زاویے متماثل ہوں گے۔

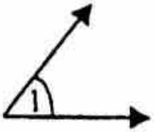


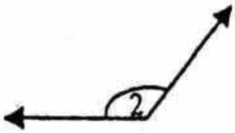
$\angle 1 \cong \angle 2$



$\angle 1 \cong \angle 2$

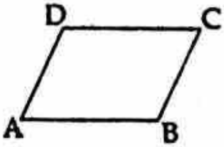
نتیجہ مسئلہ 5. ایک مستوی میں دو زاویے سپلیمنٹری ہوں گے اگر ایک زاویے کے بازو دوسرے زاویے کے بازوؤں کے اس طرح متوازی ہوں کہ بازوؤں کے ایک جوڑے کی سمت ایک ہی ہو اور دوسرے جوڑے کی سمت مخالف ہو۔





$m\angle 1 + m\angle 2 = 180°$

8.14 متوازی الاضلاع



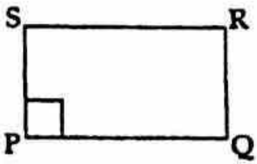
ایک چوکور جس کے مخالف ضلعے متوازی ہوں متوازی الاضلاع (*Parallelogram*) کہلاتا ہے۔ اسے "‖" سے ظاہر کیا جاتا ہے۔ سامنے شکل میں ABCD ایک "‖" ہے۔

متوازی الاضلاع کی اقسام

.1 مستطیل

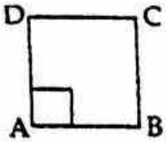
ایسا متوازی الاضلاع جس میں کم از کم ایک زاویہ قائمہ ہو مستطیل (*Rectangle*) کہلاتا ہے۔

PQRS ایک مستطیل ہے۔



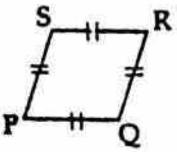
نوٹ: اگر متوازی الاضلاع کا ایک زاویہ قائمہ ہو تو اس کے تمام زاویے قائمہ ہوں گے۔

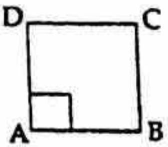
(دیکھیے نتیجہ مسئلہ 3)



.2 مربع

ایک مستطیل جس کے متصلہ اضلاع متماثل ہوں مربع (*Square*) کہلاتا ہے۔
ABCD ایک مربع ہے۔



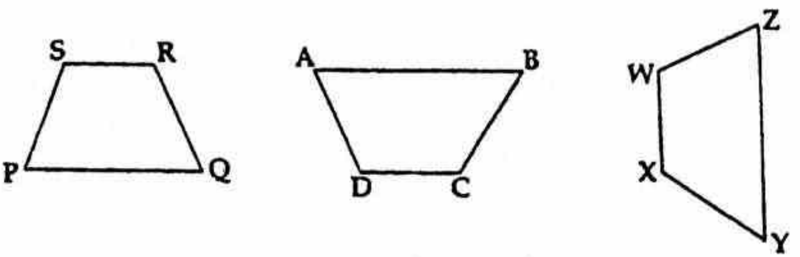


.3 معیّن

ایک متوازی الاضلاع جس کے متصلہ ضلعے متماثل ہوں معیّن (*Rhombus*) کہلاتا ہے۔ PQSR اور ABCD دونوں معیّن ہیں۔

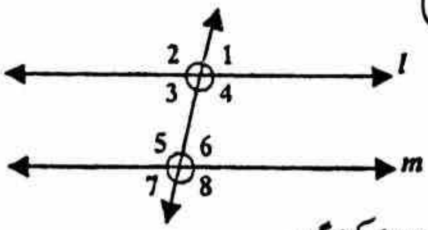
8.15 ذوزنقہ

ایک چوکور جس کے مخالف ضلعوں کا صرف ایک جوڑا متوازی ہو ذوزنقہ (*Trapezoid*) کہلاتا ہے۔
PQRS ، ABCD اور WXYZ ذوزنقہ ہیں۔



ایسی ذوزنقہ جس میں دونوں غیر متوازی اضلاع متماثل ہوں، متماثل الساقین ذوزنقہ (*Iscsceles Trapezoid*) کہلاتی ہے۔
PQSR متماثل الساقین ذوزنقہ ہے۔

مشق 8.4



.1 اگر $l \parallel m$ ، $m\angle 1 = 60^\circ$ تو بقیہ زاویوں کی پیمائش معلوم کیجیے۔

.2 $\triangle ABC$ کا ضلع $\overline{BC}$ نقطہ D تک بڑھایا گیا اور $\overline{CE}$ ، $\overline{AB}$ کے متوازی کھینچا گیا ہے۔
تو ثابت کیجیے کہ $m\angle A = m\angle ACE$; $m\angle B = m\angle ECD$
$m\angle ACD = m\angle A + m\angle B$

.3 اگر خط قاطع دو متوازی خطوط کو قطع کرتا ہو تو متبادلہ اندرونی زاویوں کے ناصف متوازی ہوتے ہیں۔

.4 اگر خط قاطع دو متوازی خطوط کو قطع کرتا ہو تو متناظرہ زاویوں کے کسی ایک جوڑے کے ناصف متوازی ہوتے ہیں۔

5. ایک خط قاطع اگر دو متوازی خطوط کو قطع کرتا ہو تو خط قاطع کے ایک ہی طرف کے اندرونی زاویوں کے ناصف ایک دوسرے سے قائمہ زاویے بناتے ہیں۔

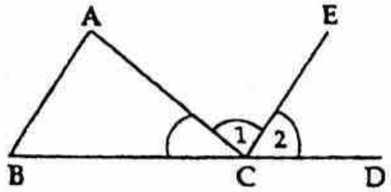
6. ایک متماثل الساقین مثلث کے قاعدے کے متوازی اگر ایک خط کھینچا جائے تو وہ اندرونی زاویے جو یہ متماثل خطوط سے بنائے گا، متماثل ہوں گے۔

7. اگر ایک مثلث کے کسی ایک راس کے بیرونی زاویے کا ناصف قاعدے کے متوازی ہو تو مثلث متماثل الساقین ہوگی۔

8. ثابت کیجیے کہ متوازی الاضلاع کے متقابل زاویے متماثل ہوتے ہیں۔ (اشارہ: نتیجہ صریح 2 استعمال کیجیے)۔

مسئلہ 5

کسی مثلث کے تینوں زاویوں کی مقداروں کا مجموعہ 180° ہوتا ہے۔



معلوم: ΔABC

مطلوب: $m\angle A + m\angle B + m\angle C = 180^\circ$

عمل: $\overrightarrow{BC}$ کو D تک بڑھایئے $\overline{CE} \parallel \overline{AB}$ کھینچیے۔

ثبوت:

دلائل	بیانات
1. عمل	1. $\overline{AB} \parallel \overline{CE}$ ، $\overline{AC}$ خط قاطع ہے۔
2. متوازی خطوط کے متبادلہ زاویے	2. $\therefore m\angle A = m\angle 1$
3. عمل	3. $\overline{AB} \parallel \overline{CE}$ ، $\overline{BD}$ خط قاطع ہے۔
4. متوازی خطوط کے متناظر زاویے	4. $m\angle B = m\angle 2$
5. مساوات کی جمعی خاصیت	5. $\therefore m\angle A + m\angle B = m\angle 1 + m\angle 2$
6. مساوات کی جمعی خاصیت	6. دونوں طرف $m\angle ACB$ جمع کرنے پر $m\angle A + m\angle B + m\angle ACB = m\angle 1 + m\angle 2 + m\angle ACB$
7. $m\angle 1 + m\angle 2 = m\angle ACD$	7. $m\angle A + m\angle B + m\angle C = m\angle ACD + m\angle ACB$
8. $m\angle ACD + m\angle ACB = 180^\circ$ (سپلیمنٹری زاویوں کا موضوعہ)	8. $\therefore m\angle A + m\angle B + m\angle C = 180^\circ$

فہوالمطلوب

نتیجہ صریح 1. ایک مثلث میں صرف ایک زاویہ قائمہ یا صرف ایک زاویہ منفرجہ ہوسکتا ہے۔

نتیجہ صریح 2. ہر مثلث میں کم از کم دو زاویہ حادہ ہوتے ہیں۔

نتیجہ صریح 3. ایک قائمہ زاویہ مثلث میں حادہ زاویے کمپلیمنٹری ہوتے ہیں۔

نتیجہ صریح 4. کسی دیے ہوئے خط پر ایسے نقطے سے جو خط پر نہ ہو ایک اور صرف ایک عمود کھینچا جا سکتا ہے۔ (اصول موضوعہ 13)

نتیجہ صریح 5. کسی مثلث کے بیرونی زاویہ کی مقدار غیر متصلہ اندرونی زاویوں کی مجموعی مقدار کے برابر ہوتی ہے۔

نتیجہ صریح 6. اگر ایک مثلث کے دو زاویے کسی دوسرے مثلث کے دو زاویوں کے متماثل ہوں تو تیسرا زاویہ دوسرے مثلث کے تیسرے زاویے کے متماثل ہوگا۔

مشق 8.5

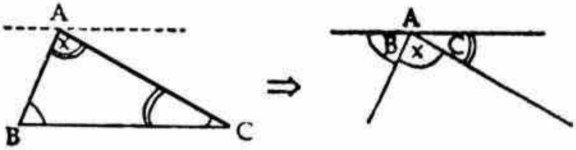
1. اگر ایک مثلث کے زاویوں کی پیمائش میں نسبت 1:2:3 ہے۔ ثابت کیجیے کہ یہ قائمہ زاویہ مثلث ہے۔

2. ایک مثلث کے زاویوں کی پیمائش میں نسبت 3:4:5 ہے مثلث کی قسم بتائیے۔

3. ثابت کیجیے کہ کسی چوکور کے زاویوں کی پیمائشوں کا مجموعہ 360° ہے۔

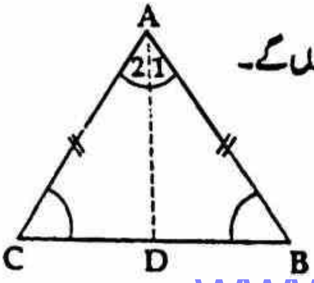
4. ایک مثلث کو ٹکڑوں میں کاٹ کر کس طرح جوڑا جائے کہ دیکھ کر ہی ظاہر ہو جائے کہ اس کے تینوں زاویے دو قائمہ زاویوں کے برابر ہیں۔

[اشارہ: ایک راستہ یہ بھی ہوسکتا ہے:]



5. $\triangle ABC$ میں $\angle A$ قائمہ زاویہ ہے۔ $\overline{AD}$ ضلع $\overline{BC}$ پر عمود ہے ثابت کیجیے کہ $\angle DAC \cong \angle ABD$ اور $\angle BAD \cong \angle ACD$

مسئلہ 6



اگر کسی مثلث کے دو اضلاع متماثل ہوں تو ان کے مقابلہ زاویے بھی متماثل ہوں گے۔

معلوم: $\triangle ABC$ میں $\overline{AB} \cong \overline{AC}$

مطلوب: $\angle B \cong \angle C$

عمل: $\angle A$ کا ناصف $\overline{AD}$ کھینچیے جو $\overline{BC}$ سے D پر ملتا ہے۔

ثبوت:

بیانات	دلائل
.1 میں $\Delta ADB \leftrightarrow \Delta ADC$	.1
(i) $\overline{AB} \cong \overline{AC}$	(i) معلوم
(ii) $\angle 1 \cong \angle 2$	(ii) عمل
(iii) $\overline{AD} \cong \overline{AD}$	(iii) مشترک (ذاتی تماثل)
.2 اس لیے $\Delta ABD \cong \Delta ADC$	.2 ض۔ز۔ض موضوعہ
.3 $\therefore m\angle B = m\angle C$	.3 مثلثوں کے تماثل کی وجہ سے

فہوالمطلوب

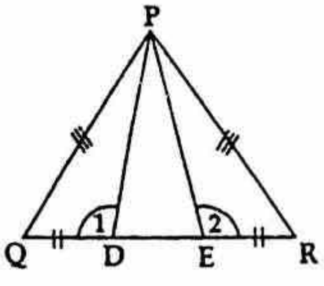
نتیجہ مرتبہ 1. ایک مساوی الاضلاع مثلث مساوی الزوایہ مثلث ہوتی ہے۔

نتیجہ مرتبہ 2. کسی متماثل الساقین مثلث میں راس کے زاویے کا ناصف قاعدہ کا عمودی ناصف ہوتا ہے۔

نوٹ: اس مسئلے کو اسطرح بھی لکھا جا سکتا ہے۔

"متماثل الساقین مثلث میں قاعدے کے زاویے متماثل ہوتے ہیں"۔

مشق 8.6



.1 مثلث ΔPQR میں

$\overline{QD} \cong \overline{RE}$ اور $\overline{PQ} \cong \overline{PR}$

ثابت کیجیے:

(i) $\overline{PD} \cong \overline{PE}$ (ii) $\angle 1 \cong \angle 2$

وسطانیہ: کسی مثلث کے ایک ضلع کے وسطی نقطے اور اس کے مخالف راس کو ملانے والے قطعہ خط کو وسطانیہ کہتے ہیں۔

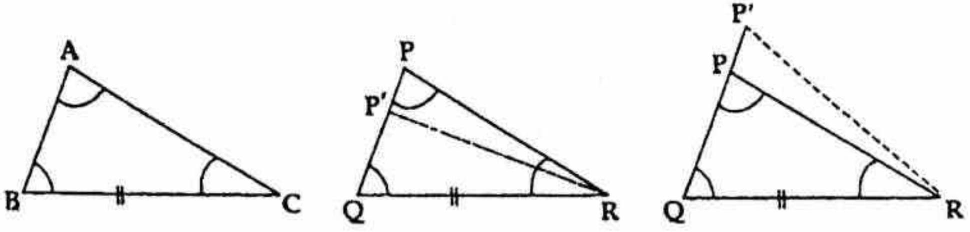
.2 متماثل الساقین میں مثلث کے متماثل ضلعوں کے وسطانیے متماثل ہوتے ہیں۔

.3 ثابت کیجیے کہ مساوی الاضلاع مثلث کے وسطانیے متماثل ہوتے ہیں۔

.4 متماثل الساقین مثلث میں ایک راس کے زاویے کا ناصف قاعدہ کا عمودی ناصف ہوتا ہے۔

مسئلہ 7

دو مثلثوں کی کسی مطابقت میں اگر ایک مثلث کا ایک ضلع اور کوئی دو زاویے ان کے مطابق دوسرے مثلث کے ایک ضلع اور دو زاویوں کے متماثل ہوں تو دونوں مثلثیں متماثل ہوں گی۔



معلوم: $\Delta ABC \leftrightarrow \Delta PQR$ میں

$\overline{BC} \cong \overline{QR}$, $\angle A \cong \angle P$ اور $\angle B \cong \angle Q$

مطلوب: $\Delta ABC \cong \Delta PQR$

ثبوت:

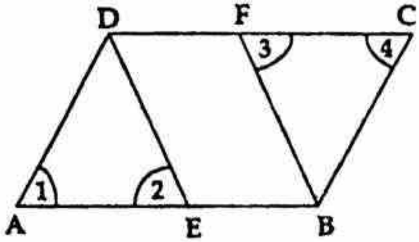
بیانات	دلائل
1. $\Delta ABC \leftrightarrow \Delta PQR$	1.
(i) $\angle A \cong \angle P$	(i) معلوم
(ii) $\angle B \cong \angle Q$	(ii) معلوم
2. $\therefore \angle C \cong \angle R$	2. مسئلہ 5 نتیجہ صریح 6
3. اگر $\overline{BA} \ncong \overline{QP}$ تو $\overline{QP}$ کو بڑھایا یا $\overline{QP}$ پر ایک نقطہ P′ اس طرح لیا کہ $\overline{QP'} \cong \overline{BA}$	3. مفروضہ
4. $\Delta ABC \leftrightarrow \Delta P'QR$ میں	4.
(i) $\overline{BC} \cong \overline{QR}$	(i) معلوم
(ii) $\angle B \cong \angle Q$	(ii) معلوم
(iii) $\overline{BA} \cong \overline{QP'}$	(iii) مفروضہ
5. $\therefore \Delta ABC \cong \Delta P'QR$	5. ض ۔ ز ۔ ض موضوعہ
6. $\therefore \angle C \cong \angle QRP'$	6. مثلثوں کا تماثل

دلائل		بیانات	
(2) میں اوپر ثابت شدہ	.7	لیکن $\angle C \cong \angle QRP$	.7
تماثل کی خاصیت متعدیت	.8	$\angle QRP' \cong \angle QRP$	.8
زاویہ کی بناوٹ کا موضوعہ	.9	یہ اسی وقت ممکن ہے جب نقاط P' اور P منطبق ہوں اور $\overline{RP'} \cong \overline{RP}$	.9
جیسا کہ P اور P' منطبق ہیں۔	.10	پس $\overline{BA} \cong \overline{QP}$	.10
	.11	$\Delta ABC \leftrightarrow \Delta PQR$ میں	.11
(i) معلوم		(i) $\overline{BC} \cong \overline{QR}$	
(ii) معلوم		(ii) $\angle B \cong \angle Q$	
(iii) اوپر ثابت شدہ		(iii) $\overline{BA} \cong \overline{QP}$	
ض۔ز۔ض موضوعہ	.12	$\therefore \Delta ABC \cong \Delta PQR$	.12

فہوالمطلوب

نوٹ: اس مسئلہ کا مختصر احوالہ یہ ہے۔ ض۔ز۔ز $\cong$ ض۔ز۔ز یا ز۔ض۔ز $\cong$ ز۔ض۔ز یا ز۔ز۔ض $\cong$ ز۔ز۔ض

مشق 8.7



.1 دی ہوئی شکل میں $\angle 4 \cong \angle 1$ ، $\angle 3 \cong \angle 2$ ، $\overline{AE} \cong \overline{CF}$

ثابت کیجیے: $\overline{DE} \cong \overline{BF}$

اور $\overline{AD} \cong \overline{CB}$

.2 اگر کسی مثلث کے ایک زاویہ کا ناصف قاعدہ پر عمود ہو تو ثابت کیجیے کہ مثلث متماثل الساقین ہے۔

.3 دو قطعہ خطوط ایک دوسرے کی تنصیف کرتے ہیں تو ثابت کیجیے کہ ان کے سروں کو ملانے والے قطعہ خطوط متماثل ہوں گے۔

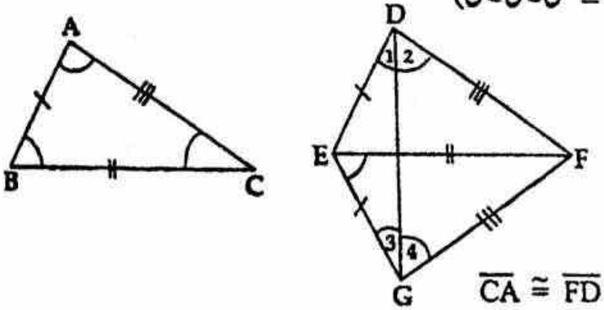
.4 ثابت کیجیے کہ متماثل الساقین مثلث کے راس کے زاویہ کا ناصف قاعدہ کا عمودی ناصف ہے۔ (سوال 2 کا عکس)

.5 ثابت کیجیے کہ کسی قطعہ خط کے عمودی ناصف کا ہر نقطہ قطعہ خط کے سروں سے مساوی الفاصلہ ہے۔

.6 ثابت کیجیے مستطیل کے وتر متماثل ہوتے ہیں۔

مسئلہ 8

دو مثلثوں کی کسی مطابقت میں اگر ایک مثلث کے تینوں اضلاع ان کے مطابق دوسری مثلث کے تینوں متناضرہ اضلاع باہم متماثل ہوں تو مثلثیں متماثل ہوں گی۔ (ض۔ض۔ض ≅ ض۔ض۔ض)



معلوم: $\Delta ABC \leftrightarrow \Delta DEF$ میں

$\overline{AB} \cong \overline{DE}$ ، $\overline{BC} \cong \overline{EF}$ اور $\overline{CA} \cong \overline{FD}$

مطلوب: $\Delta ABC \cong \Delta DEF$

عمل: فرض کیجیے ΔABC میں ضلع $\overline{BC}$ تینوں ضلعوں میں سب سے بڑا ہے۔ ΔGEF اس طرح بنائیے کہ

(i) نقطہ G نقطہ D کے مخالف سمت میں ہو۔

(ii) $\angle FEG \cong \angle B$

(iii) $\overline{EG} \cong \overline{BA}$

G اور D کو ملائیے۔

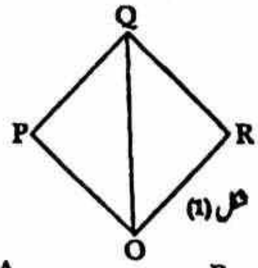
ثبوت:

بیانات	دلائل
1. $\Delta ABC \leftrightarrow \Delta GEF$ میں	.1
(i) $\overline{BC} \cong \overline{EF}$	(i) معلوم
(ii) $\angle B \cong \angle GEF$	(ii) عمل
(iii) $\overline{BA} \cong \overline{GE}$	(iii) عمل
2. $\therefore \Delta ABC \cong \Delta GEF$	2. اصول موضوعہ ض۔ز۔ض
3. اس لیے $\overline{AC} \cong \overline{GF}$ اور $\angle G \cong \angle A$	3. مثلثوں کا تماثل
4. لیکن $\overline{AC} \cong \overline{DF}$	4. معلوم
5. $\therefore \overline{GF} \cong \overline{DF}$	5. خاصیت متعدیت
6. ΔDEG میں $\therefore m\angle 1 = m\angle 3$	6. متقابلہ ضلعے متماثل (مسئلہ 6) یعنی $\overline{EG} \cong \overline{BA} \cong \overline{ED}$

بیانات	دلائل
.7 اسی طرح ΔGFD میں $m\angle 2 = m\angle 4$	.7 $\overline{DF} \cong \overline{GF}$ (مسئلہ 6)
.8 $\therefore m\angle 1 + m\angle 2 = m\angle 3 + m\angle 4$	.8 مساواتوں کی جمعی خاصیت
.9 $m\angle D = m\angle G$ یا	.9 $m\angle 1 + m\angle 2 = m\angle D$ $m\angle 3 + m\angle 4 = m\angle G$
.10 لیکن $m\angle G = m\angle A$	.10 (3) میں ثابت شدہ
.11 $\therefore m\angle A = m\angle D$	.11 خاصیت متعدیت
.12 $\Delta ABC \leftrightarrow \Delta DEF$ میں	.12
(i) $\overline{AB} \cong \overline{DE}$	(i) معلوم
(ii) $\angle A \cong \angle D$	(ii) ثابت شدہ
(iii) $\overline{AC} \cong \overline{DF}$	(iii) معلوم
.13 $\therefore \Delta ABC \cong \Delta DEF$	.13 ض ۔ ز ۔ ض موضوعہ

فہوالمطلوب

مشق 8.8



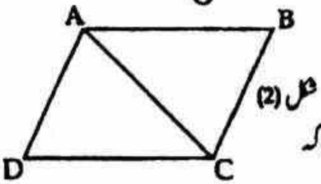
شکل (1)

.1 شکل (1) میں $\overline{OP} \cong \overline{OR}$ اور $\overline{PQ} \cong \overline{QR}$ ہے۔ تو ثابت کیجیے کہ

(i) $\angle P \cong \angle R$

(ii) $\angle PQO \cong \angle RQO$

(iii) $\angle POQ \cong \angle ROQ$



شکل (2)

.2 شکل (2) میں $\overline{AB} \cong \overline{CD}$ اور $\overline{AD} \cong \overline{BC}$ ہے۔ تو ثابت کیجیے کہ

$\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ اور $\angle B \cong \angle D$

.3 اشکال (3) اور (4) میں $\overline{AB} \cong \overline{AC}$, $\overline{BD} \cong \overline{DC}$ ہے۔ تو ثابت کیجیے کہ

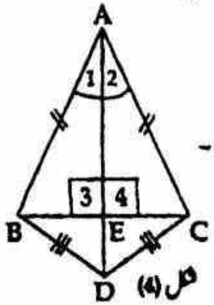
$\overline{AD}$ نقطہ E پر $\overline{BC}$ کا عمودی ناصف ہے۔

[اشارہ : ثابت کیجیے $\angle 1 \cong \angle 2$

پھر ثابت کیجیے کہ $\angle 3 \cong \angle 4$ اور سپلیمنٹری زاویے ہیں۔

یوں ہر ایک زاویہ قائمہ ہے]

شکل (3)



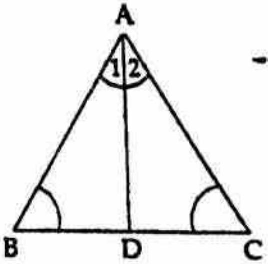
شکل (4)

4. دو متماثل الساقین مثلثوں، جن کا قاعدہ مشترک ہو، کے راسوں کو ملانے والا خط قاعدہ کا عمودی ناصف ہوتا ہے۔
5. متماثل الساقین مثلث کے قاعدے کی تنصیف کرنے والا وسطانیہ اس کے راس کے زاویے کا ناصف اور قاعدہ پر عمود ہوتا ہے۔
6. ایک نقطہ جو کسی دیئے ہوئے قطعہ خط کے سروں سے مساوی الفاصلہ ہو وہ قطعہ خط کے عمودی ناصف پر واقع ہوتا ہے۔
7. اگر ایک قائمہ زاویہ مثلث کا وتر اور ایک حادہ زاویہ دوسری قائمہ زاویہ مثلث کے وتر اور ایک حادہ زاویہ کے متماثل ہو تو دونوں مثلثیں متماثل ہوں گی۔

نوٹ : اس کا حوالہ یوں دیا جائے گا وتر ۔ زاویہ ≅ وتر ۔ زاویہ یا مختصراً و ۔ ز ≅ و ۔ ز

8. ایک زاویہ کے ناصف کے کسی نقطہ سے اس کے بازوؤں پر عمود کھینچے جائے تو وہ متماثل ہوں گے۔
9. کسی مثلث کے دو زاویوں کے ناصفوں کا نقطہ تقاطع اس کے تینوں اضلاع سے مساوی الفاصلہ ہوتا ہے۔

مسئلہ 9



اگر کسی مثلث کے دو زاویے متماثل ہوں تو ان کے متقابلہ اضلاع بھی متماثل ہوں گے۔

معلوم : مثلث ΔABC میں $\angle B \cong \angle C$

مطلوب: $\overline{AC} \cong \overline{AB}$

عمل: زاویہ A کا ناصف $\overline{AD}$ کھینچیے جو $\overline{BC}$ کو نقطہ D پر قطع کرے۔

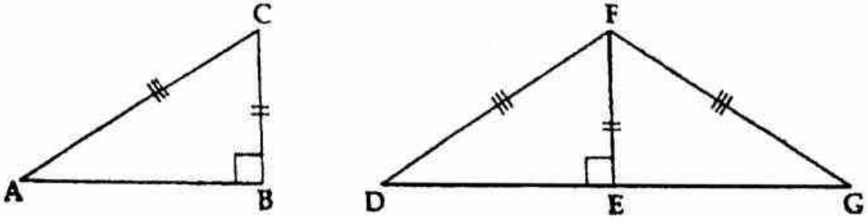
ثبوت:

بیانات	دلائل
1. $\Delta ABD \leftrightarrow \Delta ACD$ میں	1.
(i) $\angle B \cong \angle C$	(i) معلوم
(ii) $\angle 1 \cong \angle 2$	(ii) عمل
(iii) $\overline{AD} \cong \overline{AD}$	(iii) مشترک
2. $\therefore \Delta ABD \cong \Delta ACD$	2. ز۔ز۔ض ≅ ز۔ز۔ض
3. $\overline{AB} \cong \overline{AC}$	3. مثلثوں کا متماثل

فہو المطلوب

مسئلہ 10

اگر دو قائمہ زاویہ مثلثوں کی کسی مطابقت میں ان کے وتر متماثل ہوں اور ایک مثلث کا ایک ضلع اس کے مطابق دوسری مثلث کے ایک ضلع کے متماثل ہو تو مثلثیں متماثل ہوں گی۔ (قائمہ زاویہ مثلثوں میں و۔ض $\cong$ و۔ض)



معلوم: قائمہ زاویہ مثلثوں میں: $\Delta ABC \leftrightarrow \Delta DEF$

$\angle B \cong \angle E$ (قائمہ زاویے)، $\overline{AC} \cong \overline{DF}$ (وتر) اور $\overline{BC} \cong \overline{EF}$

مطلوب: $\Delta ABC \cong \Delta DEF$

عمل: $\overline{DE}$ کو G تک اس طرح بڑھایئے کہ $\overline{EG} \cong \overline{AB}$، نقاط G اور F کو ملایئے۔

ثبوت:

بیانات	دلائل
.1 $m\angle DEF + m\angle GEF = 180^\circ$	.1 دو متصلہ سپلیمنٹری زاویے
.2 لیکن $m\angle DEF = 90^\circ$	.2 معلوم
.3 $\therefore\ m\angle GEF = 90^\circ$	.3 $180^\circ - 90^\circ = 90^\circ$
.4 $\Delta GEF \leftrightarrow \Delta ABC$ میں	.4
(i) $\overline{GE} \cong \overline{AB}$	(i) عمل
(ii) $\angle GEF \cong \angle ABC$	(ii) ہر ایک قائمہ ہے
(iii) $\overline{EF} \cong \overline{BC}$	(iii) معلوم
.5 پس $\therefore\ \Delta GEF \cong \Delta ABC$	.5 ض ۔ ز ۔ ض $\cong$ ض ۔ ز ۔ ض
.6 اس لیے $\angle G \cong \angle A$ اور $\overline{FG} \cong \overline{AC}$	.6 مثلثوں کا تماثل
.7 $\therefore\ \overline{FG} \cong \overline{DF}$	.7 چونکہ $\overline{AC} \cong \overline{DF}$ (معلوم)
.8 مثلث ΔDFG میں $\angle D \cong \angle G$	.8 متقابلہ ضلعے متماثل ہیں۔
.9 $\therefore\ \angle D \cong \angle A$	.9 ہر ایک $\angle G$ کے برابر ہے۔

10. میں $\Delta ABC \leftrightarrow \Delta DEF$

(i) $\angle A \cong \angle D$ — ثابت شدہ

(ii) $\angle ABC \cong \angle DEF$ — قائمہ زاویے

(iii) $\overline{AC} \cong \overline{DF}$ — معلوم

11. اس لیے $\Delta ABC \cong \Delta DEF$ — ز ـ ز ـ ض $\cong$ ز ـ ز ـ ض

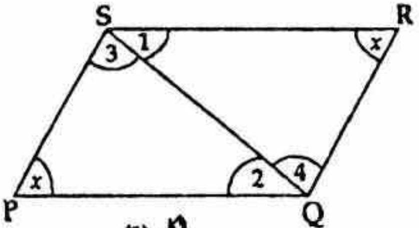
فہوالمطلوب

مشق 8.9

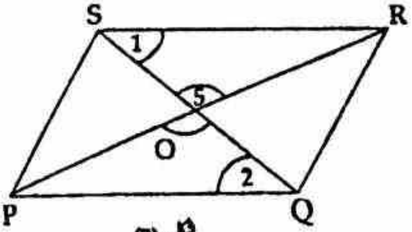
1. زاویہ کے ناصف پر واقع کوئی نقطہ اس کے بازووں سے مساوی الفاصلہ ہوتا ہے۔
ارتفاع: کسی مثلث کے کسی راس سے مخالف ضلع پر کھینچے جانے والا عمود ارتفاع کہلاتا ہے۔
2. اگر ایک مثلث کے دو ارتفاع متماثل ہوں تو مثلث متماثل الساقین ہوگی۔
3. اگر ایک مثلث کے تینوں ارتفاع متماثل ہوں تو مثلث مساوی الاضلاع ہوگی۔
4. وہ نقطہ جو کسی زاویے کے بازووں سے مساوی الفاصلہ ہو اس زاویہ کے ناصف پر واقع ہوتا ہے۔(سوال 1 کا عکس)
5. مثلث کے اندرونے کا ایک ایسا نقطہ جو تینوں اضلاع سے مساوی الفاصلہ ہو مثلث کے تینوں زاویوں کے ناصفوں پر واقع ہوتا ہے۔
6. اگر کسی مثلث کے ایک راس کے زاویے کا ناصف قاعدہ کی تنصیف کرتا ہے تو مثلث متماثل الساقین ہے۔
7. متوازی الاضلاع کا وتر اسے دو متماثل مثلثوں میں تقسیم کرتا ہے۔
8. متوازی الاضلاع میں متقابلہ اضلاع متماثل ہوتے ہیں۔
9. متوازی الاضلاع میں متقابلہ زاویے متماثل ہوتے ہیں۔
10. متوازی الاضلاع میں ایک ہی طرف کے دو اندرونی زاویے سپلیمنٹری ہوتے ہیں۔

مسئلہ 11

متوازی الاضلاع کے متقابلہ زاویے اور اضلاع متماثل ہوتے ہیں اور وتر ایک دوسرے کی تنصیف کرتے ہیں۔



شکل (1)



شکل (2)

معلوم: $\|^{m}$ PQRS

مطلوب: (i) $\overline{PQ} \cong \overline{RS}$, $\overline{PS} \cong \overline{QR}$ (ii) $\angle P \cong \angle R$, $\angle S \cong \angle Q$

(iii) دونوں وتر $\overline{PR}$ اور $\overline{SQ}$ ایک دوسرے کی نقط O پر تنصیف کرتے ہیں۔

عمل: شکل (1) میں نقاط Q اور S ملائیے۔

ثبوت:

بیانات	دلائل
1. شکل (1) میں $\overline{SR} \parallel \overline{PQ}$ ، $\overline{SQ}$ خط قاطع ہے۔ لہٰذا $m\angle 1 = m\angle 2$	1. متوازی خطوط کے متبادلہ زاویے (مسئلہ 4)
2. اسی طرح $m\angle 3 = m\angle 4$	2. $\overline{SP} \parallel \overline{RQ}$ ، $\overline{SQ}$ خط قاطع ہے۔
3. لہٰذا $m\angle 1 + m\angle 3 = m\angle 2 + m\angle 4$	3. مساواتوں کی جمعی خاصیت
4. یا $m\angle PSR = m\angle PQR$	4. زاویوں کی جمع کا موضوعہ
5. $\Delta SPQ \leftrightarrow \Delta QRS$ میں	5.
(i) $\angle 1 \cong \angle 2$	(i) اوپر (1) میں ثابت شدہ
(ii) $\overline{SQ} \cong \overline{SQ}$	(ii) مشترک
(iii) $\angle 3 \cong \angle 4$	(iii) اوپر (2) میں ثابت شدہ
6. پس $\Delta SPQ \cong \Delta QRS$	6. ز۔ض۔ز $\cong$ ز۔ض۔ز (مسئلہ 7)
7. پس $\overline{PQ} \cong \overline{RS}$ ، $\overline{PS} \cong \overline{QR}$ اور $\angle P \cong \angle R$	7. اس لیے کہ مثلثیں متماثل ہیں۔
8. مزید یہ کہ $\angle S \cong \angle Q$ یعنی کہ متقابلہ زاویے اور ضلعے متماثل ہوتے ہیں۔ اب شکل (2) میں	8. اوپر (4) میں ثابت شدہ
9. $\Delta POQ \leftrightarrow \Delta ROS$ میں	9.
(i) $m\angle 2 = m\angle 1$	(i) اوپر (1) میں ثابت شدہ
(ii) $\angle POQ \cong \angle SOR$	(ii) راسی زاویے (مسئلہ 1)
(iii) $\overline{PQ} \cong \overline{SR}$	(iii) اوپر (7) میں ثابت کیا گیا۔
10. پس $\Delta POQ \cong \Delta ROS$	10. ز۔ز۔ض $\cong$ ز۔ز۔ض (مسئلہ 7)

11. لہٰذا $\overline{OQ} \cong \overline{OS}$ اور $\overline{PO} \cong \overline{OR}$ ∴ | 11. مثلثوں کا تماثل
12. پس وتر $\overline{PR}$ اور $\overline{RS}$ ایک دوسرے کی تنصیف کرتے ہیں۔ | 12. چونکہ O ہر وتر کا وسطی نقطہ ہے۔

فہوالمطلوب

نتیجہ صریح: ایک ||^{m} کا ہر وتر اسے دو متماثل مثلثوں میں تنصیف کرتا ہے۔
[یہ اوپر (5) اور (6) میں ثابت کیا گیا ہے]۔

مشق 8.10

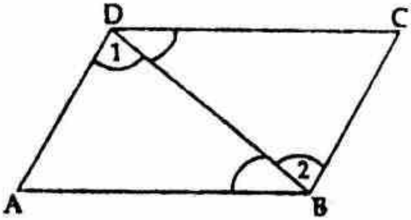
1. ثابت کیجیے کہ ایک متوازی الاضلاع میں ایک طرف کے دونوں اندرونی زاویے سپلیمنٹری ہوتے ہیں۔
2. ثابت کیجیے کہ متوازی الاضلاع کے کسی ایک ضلع کے ساتھ بننے والے زاویوں کے ناصف ایک دوسرے پر عمود ہوتے ہیں۔
3. اگر کسی چوکور کے متقابلہ اضلاع کے دونوں جوڑے متماثل ہوں تو ثابت کیجیے کہ چوکور ایک متوازی الاضلاع ۔
4. ثابت کیجیے کہ کسی چوکور کے وتر باہم تنصیف کریں تو وہ ایک متوازی الاضلاع ہے۔
5. ثابت کیجیے کہ اگر کسی چوکور کے ہر ضلع کے ساتھ بننے والے اندرونی زاویے سپلیمنٹری ہوں تو وہ متوازی الاضلاع ہے۔
6. ثابت کیجیے کہ کسی چوکور کے متقابلہ زاویے متماثل ہوں تو وہ متوازی الاضلاع ہے۔
7. ثابت کیجیے کہ مستطیل کے دونوں وتر متماثل ہوتے ہیں۔
8. ثابت کیجیے کہ مربع کے وتر اس کے زاویوں کی تنصیف کرتے ہیں۔
9. ثابت کیجیے کہ مربع کے وتر ایک دوسرے کے عمودی ناصف ہوتے ہیں۔
10. اگر کسی چوکور کے وتر متماثل اور ایک دوسرے کے عمودی ناصف ہوں تو وہ مربع ہے۔
11. ثابت کیجیے کہ
    (i) معین کے وتر ایک دوسرے کے عمودی ناصف ہوتے ہیں
    (ii) معین کے وتر اس کے زاویوں کی تنصیف کرتے ہیں۔

متماثل الساقین ذوزنقہ۔ اگر کسی ذوزنقہ کے غیر متوازی اضلاع متماثل ہوں تو اسے متماثل الساقین ذوزنقہ کہتے ہیں۔

12. ثابت کیجیے کہ متماثل الساقین ذوزنقہ میں قاعدہ کے ساتھ بننے والے زاویے متماثل ہوتے ہیں۔

مسئلہ 8

اگر کسی چوکور کے متقابلہ ضلعوں کا ایک جوڑا متماثل و متوازی ہو تو یہ ایک متوازی الاضلاع ہے۔



معلوم: چوکور ABCD میں $\overline{AB} \cong \overline{CD}$
اور $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$

مطلوب: چوکور ABCD ایک $\parallel^m$ ہے۔

عمل: نقاط B اور D کو ملایئے۔

ثبوت:

دلائل		بیانات	
متوازی خطوط کے متبادلہ زاویے (مسئلہ 4)	.1	$\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ ، $\overline{BD}$ خط قاطع ہے۔ $\therefore \angle ABD \cong \angle CDB$	.1
	.2	لہٰذا $\Delta ADB \leftrightarrow \Delta CBD$ میں	.2
(i) معلوم		(i) $\overline{AB} \cong \overline{CD}$	
(ii) اوپر (1) میں ثابت کیا گیا		(ii) $\angle ABD \cong \angle CDB$	
(iii) مشترک		(iii) $\overline{BD} \cong \overline{BD}$	
ض۔ز۔ض $\cong$ ض۔ز۔ض	.3	$\therefore \Delta ADB \cong \Delta CBD$	.3
مثلثوں کا تماثل	.4	$\therefore \angle 1 \cong \angle 2$	.4
متبادل زاویوں کی تعریف کی رو سے	.5	لیکن یہ متبادلہ زاویے ہیں	.5
متبادلہ زاویے متماثل ہیں (مسئلہ 3)	.6	$\overline{AD} \parallel \overline{BC}$	.6
معلوم	.7	$\overline{AB} \parallel \overline{CD}$	.7
متقابلہ اضلاع متوازی ہیں۔	.8	ABCD ایک $\parallel^m$ ہے	.8

فہو المطلوب

مشق 8.11

.1 اگر متوازی الاضلاع ABCD کے ضلعوں $\overline{AB}$ ، $\overline{BC}$ ، $\overline{CD}$ اور $\overline{DA}$ پر چار نقاط S، R، Q، P بالترتیب اس طرح لیے گئے ہیں کہ $\overline{AP} \cong \overline{BQ} \cong \overline{CR} \cong \overline{DS}$ تو ثابت کیجیے کہ PQRS ایک $\parallel^m$ ہے۔

.2 کسی $\|^{m}$ میں دو متقابلہ ضلعوں کے وسطی نقاط کو ملانے والا خط دیگر اضلاع کے متوازی ہوتا ہے۔

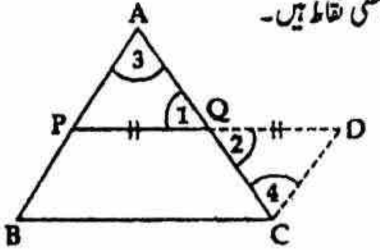
.3 اگر کسی $\|^{m}$ کے دو متصلہ اضلاع متماثل ہوں تو وہ معین ہے۔

.4 کسی متوازی الاضلاع کے زاویوں کے ناصف ایک مستطیل کا احاطہ کرتے ہیں۔

.5 اگر کسی چوکور کے زاویوں کے ناصف ایک مستطیل کا احاطہ کرتے ہیں تو یہ $\|^{m}$ ہے۔

مسئلہ 13

کسی مثلث کے دو اضلاع کے وسطی نقاط کو ملانے والا قطعہ خط تیسرے ضلع کے متوازی اور لمبائی میں اس کا نصف ہوتا ہے۔



معلوم: مثلث ΔABC میں P اور Q بالترتیب $\overline{AB}$ اور $\overline{AC}$ کے وسطی نقاط ہیں۔
$\overline{PQ}$ ان کو ملانے والا قطعہ خط ہے۔

مطلوب: $\overline{PQ} \parallel \overline{BC}$ اور $m\overline{PQ} = \frac{1}{2} m\overline{BC}$

عمل: $\overrightarrow{PQ}$ کو D تک اس طرح بڑھایئے کہ $\overline{QD} \cong \overline{PQ}$
نقاط C اور D کو ملایئے۔

ثبوت:

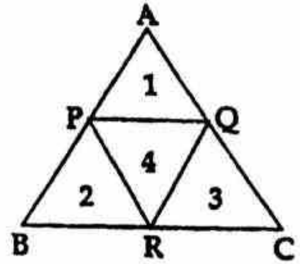
بیانات	دلائل
.1 $\Delta APQ \leftrightarrow \Delta CDQ$ میں	.1
(i) $\overline{PQ} \cong \overline{QD}$	(i) عمل
(ii) $\angle 1 \cong \angle 2$	(ii) راسی زاویے
(iii) $\overline{AQ} \cong \overline{QC}$	(iii) معلوم
.2 $APQ \cong \Delta CDQ$	.2 اصول موضوعہ ض۔ز۔ض
.3 $\overline{AP} \cong \overline{CD}$ اور $\angle 3 \cong \angle 4$	.3 مثلثوں کا تماثل
.4 لیکن $\overline{PB} \cong \overline{AP}$	.4 معلوم
.5 $\overline{PB} \cong \overline{CD}$	.5 اس لیے کہ ان میں سے ہر ایک $\overline{AP}$ کے متماثل ہے۔
.6 $\angle 3$ اور $\angle 4$ متبادلہ زاویے ہیں۔	.6 متبادلہ زاویے کی تعریف کے اعتبار سے
.7 $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ یعنی $\overline{PB} \parallel \overline{CD}$	.7 متبادلہ زاویے متماثل ہیں۔
.8 PBCD ایک $\|^{m}$ ہے	.8 متقابلہ ضلعوں کا ایک جوڑا $\|$ بھی ہے اور $\cong$ بھی

.9 لہٰذا $\overline{PD} \parallel \overline{BC}$ اور $\overline{PD} \cong \overline{BC}$	.9 $\parallel^{m}$ کے متقابل ضلعے $\parallel$ اور $\cong$ ہوتے ہیں۔
.10 پس $\overline{PQ} \parallel \overline{BC}$ اور $m\overline{PQ} = \frac{1}{2}\, m\overline{BC}$	.10 اس لیے کہ $\overline{PD}$ اور $\overline{PQ}$ ایک ہی خط ہے۔ اور $m\overline{PQ} = \frac{1}{2}\, m\overline{PD}$

فہو المطلوب

مشق 8.12

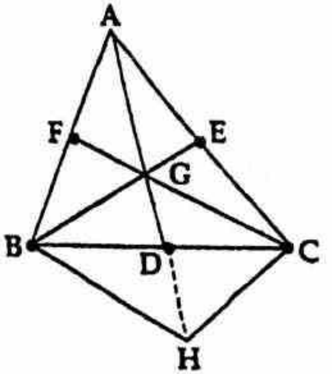
1. ثابت کیجیے کہ اگر ایک قطعہ خط کسی مثلث کے ایک ضلع کی تنصیف کرتا ہو اور دوسرے کے متوازی ہو تو وہ تیسرے ضلع کی بھی تنصیف کرے گا۔ (مسئلہ 13 کا عکس)



2. ثابت کیجیے کہ کسی مثلث کے تینوں ضلعوں کے وسطی نقاط کو ملانے سے جو چار مثلث بنتے ہیں ان میں سے ہر ایک دوسرے کے متماثل ہوتا ہے۔
3. ثابت کیجیے کہ کسی چوکور کے اضلاع کے وسطی نقاط کو ترتیب وار ملانے سے $\parallel^{m}$ بن جاتا ہے۔
4. ثابت کیجیے کہ کسی چوکور کے متقابلہ اضلاع کے وسطی نقاط کو ملانے والے خطوط ایک دوسرے کی تنصیف کرتے ہیں۔
5. کسی قائمہ زاویہ مثلث کے وتر کا وسطی نقطہ تینوں راسوں سے مساوی الفاصلہ ہوتا ہے۔

مسئلہ 14

مثلث کے وسطانیے ایک ہی نقطے سے گزرتے ہیں اور یہ نقطہ ہر وسطانیہ کا نقطہ تثلیث ہوتا ہے۔



معلوم: مثلث ABC میں وسطانیے $\overline{BE}$ اور $\overline{CF}$ نقطہ G پر قطع کرتے ہیں۔

مطلوب: (i) $\overline{AG}$ کو بڑھایا جو کہ $\overline{BC}$ کو D پر تنصیف کرتا ہے۔ اور

(ii) G ہر وسطانیہ کا نقطہ تثلیث ہے۔

عمل: $\overline{CH}$ متوازی $\overline{EB}$ کھینچیے جو $\overline{AD}$ کو بڑھانے سے H پر ملتا ہے۔

نقاط B اور H کو ملائیے۔

ثبوت:

بیانات	دلائل
1. $\triangle ACH$ میں . $\overline{AE} \cong \overline{EC}$ اور $\overline{EG} \parallel \overline{CH}$	1. معلوم عمل
2. $\overline{AG} \cong \overline{GH}$	2. مسئلہ 13 کا عکس
3. $\triangle ABH$ میں $\overline{AG} \cong \overline{GH}$ $\overline{AF} \cong \overline{FB}$	3. اوپر (2) میں ثابت کیا گیا معلوم
4. $\overline{FG} \parallel \overline{BH}$	4. مسئلہ 13 کی رو سے
5. پس BGCH ایک $\parallel^m$ ہے	5. متقابلہ اضلاع متوازی ہیں
6. وتر $\overline{BC}$ اور $\overline{GH}$ ایک دوسرے کی تنصیف کرتے ہیں۔ یعنی $\overline{GD} \cong \overline{DH}$ ، $\overline{BD} \cong \overline{DC}$	6. مسئلہ 11 کے اعتبار سے
7. $\overline{AD}$ مثلث ABC کا وسطانیہ ہے	7. $\overline{BD} \cong \overline{DC}$ اوپر ثابت کیا گیا
8. $m\overline{AG} = m\overline{GH} = 2m\overline{GD}$	8. $\overline{GD} \cong \overline{DH} \Rightarrow m\overline{GH} = 2m\overline{GD}$
9. پس G خط $\overline{AD}$ کا نقطہ تثلیث ہے	9. کیونکہ $\overline{AG}$ ، $\overline{GD}$ کا دگنا ہے
10. اس طرح سے ہم ثابت کر سکتے ہیں کہ G $\overline{BE}$ اور $\overline{CF}$ کا بھی نقطہ تثلیث ہے	10. مندرجہ بالا طریقہ سے

فہوالمطلوب

مشق 8.13

1. اگر ABC میں وسطانیے $\overline{BC}$ اور $\overline{CF}$ متماثل ہوں تو ثابت کیجیے کہ $\overline{AC} \cong \overline{AB}$ [اشارہ: اس کے حل کے لیے یہ ثابت کیجیے کہ $\angle CBE \cong \angle BCF$ وغیرہ]

2. اگر کسی مثلث کے تینوں وسطانیے متماثل ہوں تو ثابت کیجیے کہ مثلث مساوی الاضلاع ہے۔

تعریفات:

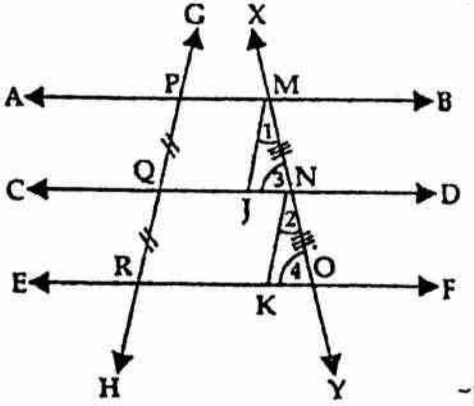
(i) ہم نقطہ خطوط (Concurrent lines) : اگر تین یا زیادہ خطوط ایک ہی نقطہ سے گزرتے ہوں تو وہ ہم نقطہ خطوط کہلاتے ہیں۔

(ii) مرکز نما (Centroid) : وہ نقطہ جس سے تینوں وسطانیے گزرتے ہوں مثلث کا مرکز نما کہلاتا ہے۔

3. $\triangle ABC$ کے وسطانیہ $\overline{AD}$ ، $\overline{BE}$ ، $\overline{CF}$ نقطہ H پر ملتے ہیں۔ ثابت کیجیے کہ H مثلث DEF کا مرکز نما ہے۔

مسئلہ 15

اگر تین یا زیادہ متوازی خطوط ایک خطِ قاطع پر متماثل قطعات قطع کریں تو وہ ہر دوسرے خطِ قاطع متماثل قطعات قطع کریں گے۔



معلوم: متوازی خطوط $\overleftrightarrow{AB}$ ، $\overleftrightarrow{CD}$ اور $\overleftrightarrow{EF}$ خطِ قاطع $\overleftrightarrow{GH}$ کو بالترتیب P, Q, R پر اس طرح قطع کرتے ہیں کہ:

$$\overline{PQ} \cong \overline{QR}$$

$\overleftrightarrow{XY}$ ایک اور خطِ قاطع ہے جو $\overleftrightarrow{EF}, \overleftrightarrow{CD}, \overleftrightarrow{AB}$ کو بالترتیب O, N, M پر قطع کرتا ہے۔

مطلوب: $\overline{NM} \cong \overline{NO}$

عمل: $\overleftrightarrow{GH}$ کے متوازی $\overline{MJ}$ اور $\overline{NK}$ کھینچیے۔
جو $\overleftrightarrow{CD}$ اور $\overleftrightarrow{EF}$ کو بالترتیب J اور K پر قطع کرتے ہیں۔

ثبوت:

بیانات		دلائل	
چوکور PQJM میں			
$\overline{PM} \parallel \overline{QJ}$	.1	$\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD}$ معلوم	.1
اور $\overline{PQ} \parallel \overline{MJ}$		عمل	
پس PMJQ ایک $\parallel^{m}$ ہے	.2	متقابلہ اضلاع متوازی ہیں	.2
$\therefore\ \overline{PQ} \cong \overline{MJ}$	.3	$\parallel^{m}$ کے متقابلہ اضلاع (مسئلہ 11)	.3
اسی طرح QRKN ایک $\parallel^{m}$ ہے	.4	$\overline{QN} \parallel \overline{RK}$ اور $\overline{QR} \parallel \overline{KN}$	.4
$\therefore\ \overline{QR} \cong \overline{NK}$	.5	(3) میں دیئے ہوئے سبب کے مطابق	.5
لیکن $\overline{PQ} \cong \overline{QR}$	.6	معلوم	.6
$\therefore\ \overline{MJ} \cong \overline{NK}$	.7	مساوات کی خاصیت متعدیت	.7
اب $\overline{MJ} \parallel \overline{NK}$	.8	ہر ایک $\overline{GH}$ کے متوازی ہے۔	.8
$\therefore\ \angle 1 \cong \angle 2$	.9	متوازی خطوط کے متناظرہ زاویے	.9

10. $\Delta MNJ \leftrightarrow \Delta NOK$ میں
(i) $\angle 1 \cong \angle 2$
(ii) $\angle 3 \cong \angle 4$
(iii) $\overline{MJ} \cong \overline{NK}$
11. $\therefore \Delta MNJ \cong \Delta NOK$
12. $\therefore \overline{MN} \cong \overline{NO}$

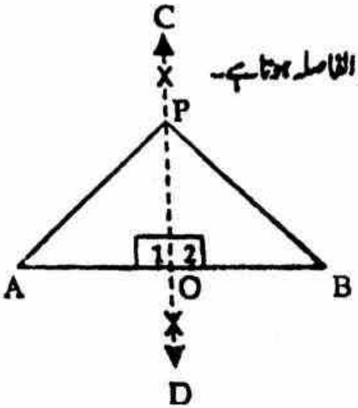
10.
(i) (9) میں ثابت ہو چکا
(ii) متوازی خطوط کے متناظرہ زاویے
(iii) اوپر (7) میں ثابت ہوا
11. ز۔ز۔ض ≅ ز۔ز۔ض
12. مثلثوں کا تماثل

فہوالمطلوب

مشق 8.14

1. کسی مثلث کے ضلعوں کے وسطی نقاط کو ملانے سے تشکیل پانے والا مثلث دیئے ہوئے مثلث کا مساوی الزاویہ ہوتا ہے۔
2. کسی چوکور کے متقابلہ اضلاع کے وسطی نقاط کو ملانے والے قطعہ خطوط ایک دوسرے کی تنصیف کرتے ہیں۔
3. کسی ذوزنقہ کے غیر متوازی اضلاع کے وسطی نقاط کو ملانے والا قطعہ خط متوازی خطوط کے متوازی اور لمبائی میں انکے مجموعہ کا نصف ہوتا ہے۔
4. کسی مثلث میں راس سے قاعدہ پر کھینچا جانے والے ہر قطعہ خط کو دیگر دو ضلعوں کے وسطی نقاط کو ملانے والا قطعہ خط تنصیف کرتا ہے۔
5. کسی مثلث کے ایک ضلع کے وسطی نقطے سے کھینچے جانے والا خط جو دوسرے ضلع کے متوازی ہو تیسرے کی تنصیف کرتا ہے۔

مسئلہ 16



کسی قطعہ خط کے عمودی ناصف پر واقع کوئی نقطہ اس کے سروں سے مساوی الفاصلہ ہوتا ہے۔

معلوم: $\overleftrightarrow{CD}$ قطعہ خط $\overline{AB}$ کا عمودی ناصف ہے جو اسے O پر قطع کرتا ہے۔ P ناصف $\overleftrightarrow{CD}$ پر کوئی نقطہ ہے۔

مطلوب: $\overline{AP} \cong \overline{BP}$

یعنی A اور B سے P مساوی فاصلے پر ہے۔

ثبوت:

بیانات	دلائل
.1 $\Delta AOP \leftrightarrow \Delta BOP$ میں	.1
(i) $\overline{AO} \cong \overline{BO}$	(i) معلوم (O وسطی نقطہ ہے)
(ii) $\angle 1 \cong \angle 2$	(ii) معلوم (O پر $\overline{CD} \perp \overline{AB}$)
(iii) $\overline{PO} \cong \overline{PO}$	(iii) مشترک
.2 $\therefore \Delta AOP \leftrightarrow \Delta BOP$	.2 اصول موضوعہ ض۔ز۔ض
.3 $\therefore \overline{AP} \cong \overline{BP}$	.3 مثلثوں کا تماثل
.4 لیکن $\overleftrightarrow{CD}$ پر P کوئی بھی نقطہ ہوسکتا ہے۔	.4 مفروضہ
.5 اسی طرح یہ ثابت کیا جاسکتا ہے کہ $\overleftrightarrow{CD}$ کا کوئی دوسرا نقطہ بھی A اور B سے مساوی فاصلہ پر ہے۔ پس عمودی ناصف پر ہر نقطہ قطعہ خط کے سروں سے مساوی الفاصلہ ہوتا ہے۔	.5 مندرجہ بالا طریقہ سے

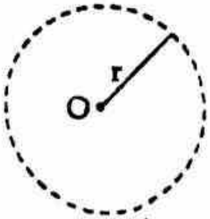
فہوالمطلوب

طریق (Locus):

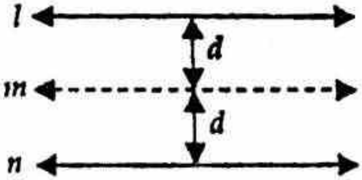
طریق (جمع طرائق) ان تمام نقاط کے سیٹ کی ایک ہندسی شکل ہوتی ہے جو دی ہوئی شرط یا شرائط کے سیٹ پر پوری اترتی ہو۔ مثلاً

1. ایک مقررہ نقطہ سے مساوی الفاصلہ نقطوں کا طریق دائرہ ہوتا ہے۔ مقررہ نقطہ دائرہ کا مرکز اور مرکز سے نقطوں کا مساوی یا مستقل فاصلہ رداس کہلاتا ہے۔ نیچے شکل (i) میں O مرکز اور r رداس ہے۔

2. دو متوازی خطوط سے مساوی الفاصلہ نقاط کا طریق ایک خط ہے جو دیئے ہوئے خطوط کے متوازی ہوتا ہے۔ شکل (ii) میں $l \parallel n$ اور m کا ہر نقطہ l اور n دونوں سے مساوی الفاصلہ ہے یوں $m \parallel l$ اور $m \parallel n$



شکل (i)

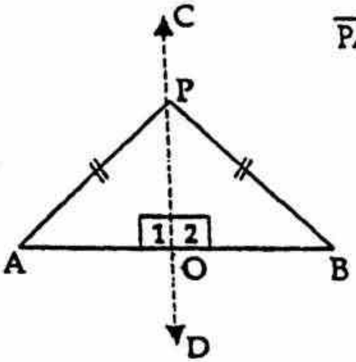


شکل (ii)

مسئلہ 17

(مسئلہ 16 کا عکس)

دو مقررہ نقطوں سے مساوی الفاصلہ نقاط کا طریق ان مقررہ نقطوں کو ملانے والے خط کا عمودی ناصف ہوتا ہے۔



معلوم: A ، B دو مقررہ نقاط اور P ایک ایسا متحرک نقطہ ہے کہ $\overline{PA} \cong \overline{PB}$

مطلوب: نقطہ P قطعہ خط $\overline{AB}$ کے عمودی ناصف پر واقع ہے۔

عمل : $\overline{AB}$ کی تنصیف نقطہ O پر کیجیے۔
نقاط P اور O کو ملائیے۔

ثبوت:

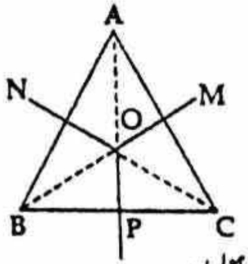
بیانات	دلائل
.1 $\Delta POA \leftrightarrow \Delta POB$ میں	.1
(i) $\overline{AO} \cong \overline{OB}$	(i) عمل
(ii) $\overline{PA} \cong \overline{PB}$	(ii) معلوم
(iii) $\overline{PO} \cong \overline{PO}$	(iii) مشترک
.2 لہٰذا $\Delta POA \cong \Delta BOP$	.2 ض۔ض۔ض $\cong$ ض۔ض۔ض
.3 $\angle 1 \cong \angle 2$	.3 مثلثوں کا تماثل
.4 لیکن 1 ∠ اور 2 ∠ سپلیمنٹری زاویے ہیں	.4 $\overleftrightarrow{AB}$ ایک خط ہے (سپلیمنٹری زاویوں کا موضوعہ)
.5 1 ∠ اور 2 ∠ میں ہر ایک قائمہ زاویہ ہے	.5 اگر دو سپلیمنٹری زاویے متماثل ہوں تو ہر ایک قائمہ زاویہ ہے۔
.6 پس $\overline{PO}$ قطعہ خط $\overline{AB}$ کا عمودی ناصف ہے	.6 $\overline{AO} \cong \overline{BO}$ اور $\overline{PO} \perp \overline{AB}$
.7 پس نقاط A اور B سے مساوی الفاصلہ پر ہر نقطہ $\overline{AB}$ کے عمودی ناصف پر واقع ہے۔	.7 مندرجہ بالا طریقہ سے ثابت کیا جا سکتا ہے۔

فہو المطلوب

مشق 8.15

1. ثابت کیجیے کہ ایک ہی قاعدہ پر بنے ہوئے متماثل الساقین مثلثوں کے راسوں کا طریق قاعدہ کا عمودی ناصف ہوتا ہے۔
2. ثابت کیجیے کہ متوازی خطوط سے مساوی الفاصلہ نقاط کا طریق دیے ہوئے خطوط کے متوازی ایک خط ہوتا ہے۔
3. ثابت کیجیے کہ کسی مثلث کے کسی بھی دو اضلاع کے عمودی ناصفوں کا نقطہ تقاطع مثلث کے راسوں سے مساوی الفاصلہ ہوتا ہے۔

مسئلہ 18



کسی مثلث کے اضلاع کے عمودی ناصف ہم نقطہ ہوتے ہیں۔

معلوم: ایک مثلث ABC ہے

مطلوب: مثلث کے اضلاع کے عمودی ناصف ہم نقطہ ہوتے ہیں۔

عمل: اضلاع $\overline{AB}$ اور $\overline{AC}$ پر عمودی ناصف $\overline{NO}$ اور $\overline{MO}$ بنائیے جو نقطہ O پر قطع کرتے ہوں۔

$\overline{BC}$ کو نقطہ P پر تنصیف کیجیے۔

$\overline{OP}$ ، $\overline{OA}$ ، $\overline{OB}$ ، $\overline{OC}$ کو کھینچیے۔

ثبوت:

بیانات	دلائل
1. $\overline{NO}$ ضلع $\overline{AB}$ کا عمودی ناصف ہے۔	1. عمل
2. $\therefore \overline{AO} \cong \overline{OB}$	2. مسئلہ 16
3. اسی طرح $\overline{AO} \cong \overline{OC}$	3. اس لیے کہ $\overline{MO}$ ضلع $\overline{AC}$ کا عمودی ناصف ہے۔
4. $\therefore \overline{OB} \cong \overline{OC}$	4. دونوں $\overline{AO}$ کے متماثل ہیں۔
5. P ضلع $\overline{BC}$ کا وسطی نقطہ ہے۔	5. عمل
6. لہٰذا $\overline{OP}$ ضلع $\overline{BC}$ کا عمودی ناصف ہے۔	6. مسئلہ 17
7. پس مثلث کے اضلاع کے عمودی ناصف ہم نقطہ ہوتے ہیں۔	7. اس لیے کہ تینوں عمودی ناصف ایک ہی نقطہ پر ملتے ہیں۔

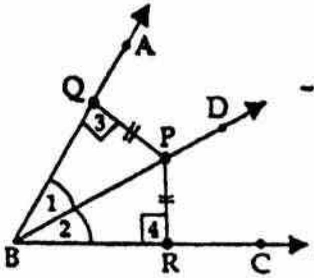
فہوالمطلوب

نوٹ: یہ ثابت کیا جاچکا ہے کہ مثلث ABC میں نقطہ O نقاط A ، B ، C سے مساوی الفاصلہ ہے۔
O کو مرکز مان کر $\overline{OA}$ رداس کا دائرہ A ، B ، C سے گزرے گا۔ اس دائرہ کو مثلث ABC کا محاصر دائرہ *(Circum-circle)* ، O کو محاصر مرکز *(Circum-centre)* اور $\overline{OA}$ (یا $\overline{OB}$ یا $\overline{OC}$) کو محاصر رداس کہا جاتا ہے۔

مشق 8.16

1. اگر کسی مثلث کا محاصر مرکز اس کے دو اضلاع سے مساوی الفاصلہ ہو تو ہو متماثل الساقین مثلث ہوگا۔
2. اگر کسی مثلث کا محاصر مرکز اس کے تینوں اضلاع سے مساوی الفاصلہ ہو تو وہ مساوی الاضلاع ہوگا۔
3. اگر مثلث PQR کا محاصر مرکز O ہے تو ثابت کیجیے کہ $m\angle QOR = 2m\angle QPR$
4. کسی مستطیل کے اضلاع کے عمودی ناصف ہم نقطہ ہوتے ہیں۔
5. وہ نقطہ معلوم کیجیے جو دیئے ہوئے تین غیر ہم خط نقاط سے مساوی الفاصلہ ہو ثبوت کے ذریعہ جواز پیش کیجیے۔
6. ثابت کیجیے کہ قائمہ زاویہ مثلث کا محاصر مرکز وتر کے وسطی نقطہ پر منطبق ہوتا ہے۔
7. ثابت کیجیے کہ حادہ زاویہ مثلث کا محاصر مرکز مثلث کے اندرونے میں ہوگا۔
8. ثابت کیجیے کہ منفرجہ زاویہ مثلث کا محاصر مرکز مثلث کے بیرونے میں ہوگا۔

مسئلہ 19



کسی زاویے کے ناصف پر واقع ہر نقطہ اس کے بازوؤں سے مساوی الفاصلہ ہوتا ہے۔

معلوم: $\overrightarrow{BD}$ زاویہ ABC کا ناصف ہے۔ P شعاع $\overrightarrow{BD}$ کا کوئی نقطہ ہے۔
$\overline{PQ}$ اور $\overline{PR}$ بالترتیب $\overrightarrow{BA}$ اور $\overrightarrow{BC}$ پر عمود ہیں۔

مطلوب: $\overline{PR} \cong \overline{PQ}$ یعنی نقطہ P شعاع $\overrightarrow{BA}$ اور $\overrightarrow{BC}$ سے مساوی فاصلہ پر ہے۔

ثبوت:

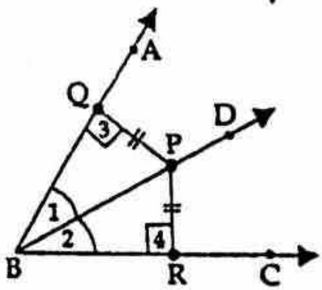
بیانات	دلائل
1. $\Delta PQB \leftrightarrow \Delta PRB$ میں	.1
(i) $\angle 3 \cong \angle 4$	(i) دونوں زاویے قائمہ ہیں
(ii) $\angle 1 \cong \angle 2$	(ii) $\overrightarrow{BD}$ ناصف ہے (معلوم)
(iii) $\overline{BP} \cong \overline{BP}$	(iii) مشترک ہے
2. لہٰذا $\Delta PQB \cong \Delta PRB$	2. ز۔ز۔ض ≅ ز۔ز۔ض
3. $\overline{PQ} \cong \overline{PR}$ یعنی نقطہ P شعاع $\overrightarrow{BA}$ اور $\overrightarrow{BC}$ سے مساوی الفاصلہ ہے۔	3. مثلثوں کا تماثل

فہو المطلوب

مسئلہ 20

(مسئلہ 19 کا عکس)

کسی زاویے کے بازوؤں سے مساوی الفاصلہ نقطہ کا طریق زاویہ کا ناصف ہوتا ہے۔



معلوم: نقطہ P شعاع $\overrightarrow{BD}$ کا کوئی نقطہ ہے جو زاویہ ABC کے بازوؤں $\overrightarrow{BA}$ اور $\overrightarrow{BC}$ سے مساوی الفاصلہ ہے یعنی

$\overline{PQ} \cong \overline{PR}$ اور $\overline{PQ} \perp \overrightarrow{BA}$ اور $\overline{PR} \perp \overrightarrow{BC}$

مطلوب: $\angle 1 \cong \angle 2$ یعنی $\overrightarrow{BD}$ زاویہ $\angle ABC$ کا ناصف ہے۔

ثبوت:

بیانات	دلائل
.1 $\Delta PRB \leftrightarrow \Delta PQB$ میں	.1 قائمہ زاویہ مثلثوں میں مطابقت
(i) $\angle 4 \cong \angle 3$	(i) دونوں زاویے قائمہ ہیں
(ii) $\overline{PR} \cong \overline{PQ}$	(ii) معلوم
(iii) $\overline{BP} \cong \overline{BP}$	(iii) مشترک وتر
.2 لہٰذا $\Delta PRB \cong \Delta PQB$	.2 قائمہ زاویہ مثلثوں میں و۔ض $\cong$ و۔ض
.3 پس $\angle 2 \cong \angle 1$ یعنی $\overrightarrow{BD}$ زاویہ $\angle ABC$ کا ناصف ہے	.3 مثلثوں کا تماثل

فہوالمطلوب

محصور مرکز (Incentre): کسی مثلث کے تینوں زاویوں کے ناصفین ایک ہی نقطہ سے گزرتے ہیں جسے مثلث کا محصور مرکز کہتے ہیں۔ یہ مثلث میں محصور دائرہ (Inscribed circle) کا مرکز ہوتا ہے۔ (محصور دائرہ : مثلث کے اندر بنا ہوا ایسا دائرہ جس پر مثلث کے تینوں اضلاع مماس ہوں)۔

مشق 8.17

1. ثابت کیجیے کہ مثلث کے تینوں زاویوں کے ناصفین ایک ہی نقطہ پر ملتے ہیں۔

2. دو قطع کرنے والے خطوط سے مساوی الفاصلہ نقطے کا طریق ان خطوط سے بنے ہوئے زاویہ کا ناصف ہوتا ہے۔

3. کسی مثلث کے راسوں کے متقابلہ ضلعوں پر کھینچے گئے عمود ہم نقطہ ہوتے ہیں۔

عمودی مرکز: مثلث کے ارتفاعوں (راسوں سے متقابلہ ضلعوں پر کھینچے گئے عمود) کا نقطہ تقاطع مثلث کا عمودی مرکز (Ortho-Centre) کہلاتا ہے۔

4. اگر O مثلث ABC کا عمودی مرکز ہے تو ثابت کیجیے کہ AOB ∠ اور ACB ∠ سپلیمنٹری زاویے ہیں۔

5. منفرجہ زاویہ ، قائمہ زاویہ اور حادہ زاویہ مثلثوں کے عمودی مرکز بالترتیب مثلث کے باہر ، اس کے کسی نقطہ پر منطبق یا مثلث کے اندر ہوتے ہیں۔

6. مثلث ABC میں A ∠ اور B ∠ کے ناصف O پر قطع کرتے ہیں تو ثابت کیجیے کہ $\overline{OC}$ زاویہ ACB کا ناصف ہے۔

7. ثابت کیجیے کہ کسی مثلث کے کسی راس کے زاویے کا ناصف قاعدے کو جہاں قطع کرتا ہے اس نقطہ کا اضلاع سے فاصلہ مساوی ہوتا ہے۔

8. ایسے تین خطوط سے مساوی الفاصلہ نقطہ معلوم کیجیے جن میں سے کوئی دو خط متوازی نہ ہوں۔

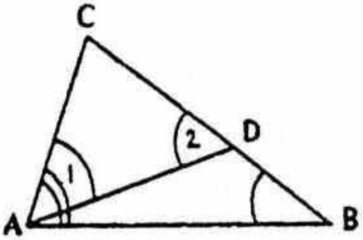
9. ثابت کیجیے کہ ایک مساوی الاضلاع مثلث کے محاصر مرکز اور محصور مرکز منطبق ہوتے ہیں۔

10. ثابت کیجیے کہ ایک مساوی الاضلاع مثلث کے محصور مرکز ، محاصر مرکز ، مرکز نما (Centroid) اور عمودی مرکز منطبق ہوتے ہیں۔

8.16 نابرابری (Inequalities)

مسئلہ 1

اگر کسی مثلث کے دو اضلاع لمبائی میں نابرابر ہوں تو زیادہ لمبے ضلع کے سامنے والے زاویے کی مقدار زیادہ ہوتی ہے۔



معلوم: ΔABC میں $m\overline{BC} > m\overline{AC}$

مطلوب: $m\angle A > m\angle B$

عمل: $\overline{BC}$ سے $\overline{CD}$ متماثل $\overline{AC}$ کے قطع کیا۔ D کو A سے ملایا۔

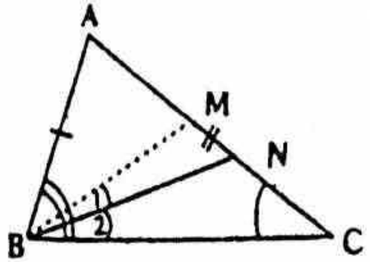
ثبوت:

بیانات	دلائل
1۔ ΔACD میں $\overline{AC} \cong \overline{CD}$	1۔ عمل
2۔ $m\angle CAD = m\angle CDA$	2۔ متماثل اضلاع کے متقابلہ زاویے (نویں کی ریاضی کی کتاب کا مسئلہ 6)
3۔ لیکن $\angle CDA$ مثلث ABD کا بیرونی زاویہ ہے۔	3۔ بیرونی زاویے کی تعریف کی رو سے
4۔ $\therefore m\angle CDA > m\angle B$	4۔ بیرونی زاویہ اندرونی غیر متصلہ زاویے سے بڑا ہوتا ہے۔ (نویں کی ریاضی کی کتاب کا مسئلہ 2)
5۔ لیکن $m\angle A > m\angle CAD$	5۔ $m\angle A = m\angle CAD + m\angle DAB$
6۔ $\therefore m\angle A > m\angle CDA$	6۔ $m\angle CDA = m\angle CAD$
7۔ $\therefore m\angle A > m\angle B$	7۔ اوپر (4) اور (6) میں نابرابری کی خاصیت متعدیت

فہو المطلوب

مسئلہ 1 (الف)

اگر کسی مثلث کے دو زاویے مقدار میں نابرابر ہوں تو مقدار میں بڑے زاویے کے سامنے والا ضلع چھوٹے زاویے کے سامنے والے ضلع سے زیادہ لمبا ہوتا ہے۔



معلوم: $\triangle ABC$

$m\angle B > m\angle C$

مطلوب: $m\overline{AC} > m\overline{AB}$

عمل: $\angle ABM$ بنایئے جو $\angle C$ کے متماثل ہو۔

$\angle MBC$ کا ناصف $\overline{BN}$ کھینچیے یعنی $m\angle 1 = m\angle 2$

بیانات	دلائل
1- $\triangle CBN$ کا بیرونی زاویہ $\angle ANB$ ہے۔	1- بیرونی زاویے کی تعریف کی رو سے
2- $m\angle ANB = m\angle C + m\angle 2$	2- نویں کی ریاضی کی کتاب کا مسئلہ 5 نتیجہ صریح
$= m\angle C + m\angle 1$	$\because m\angle 2 = m\angle 1$ (عمل)
$= m\angle ABM + m\angle 1$	$\because m\angle C = m\angle ABM$ (عمل)
$= m\angle ABN$	زاویوں کی جمع کا موضوعہ
3- $\therefore \overline{AB} \cong \overline{AN}$	3- $\because m\angle ANB = \angle ABN$ (اوپر ثابت کیا گیا)
4- $\therefore m\overline{AC} > m\overline{AB}$	4- $\because m\overline{AC} > m\overline{AN}$

فہو المطلوب

نتیجہ صریح 1- قائمۃ الزاویہ مثلث میں وتر باقی دونوں اضلاع سے زیادہ لمبا ہوتا ہے۔

نتیجہ صریح 2- منفرجۃ الزاویہ مثلث میں منفرجہ زاویے کے سامنے کا ضلع باقی دونوں اضلاع سے زیادہ لمبا ہوتا ہے۔

مشق 8.18

1۔ کسی مثلث کے سب سے بڑے ضلع کا متقابلہ زاویہ سب سے بڑا ہوتا ہے۔

2۔ اگر کسی مثلث کے دو اضلاع غیر مساوی ہوں تو چھوٹے ضلع کا متقابلہ زاویہ حادہ ہوتا ہے۔

3۔ کسی مثلث کے سب سے بڑے زاویے کا متقابلہ ضلع سب سے بڑا ہوتا ہے۔

4۔ قائمۃ الزاویہ مثلث میں وتر سب سے بڑا ضلع ہوتا ہے۔

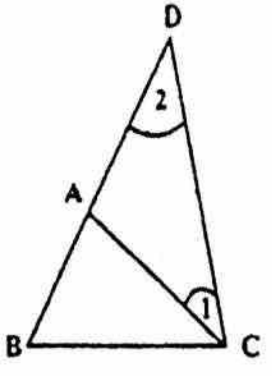
5۔ مسئلہ 1 (الف) کا متبادل ثبوت دیجیے یہ فرض کرتے ہوئے کہ اگر $m\overline{AB} \ngtr m\overline{AC}$ کو خاصیت ثلاثی کے ذریعے

(i) $m\,\overline{AC} = m\,\overline{AB}$ یا (ii) $m\,\overline{AC} < m\,\overline{AB}$ اور

مفروضے کو غلط ثابت کیجیے۔

مسئلہ 2

مثلث کے کوئی سے دو اضلاع کی لمبائیوں کا مجموعہ تیسرے ضلع کی لمبائی سے زیادہ ہوتا ہے۔



معلوم: ΔABC

مطلوب: (i) $m\overline{AB} + m\overline{AC} > m\overline{BC}$

(ii) $m\overline{AB} + m\overline{BC} > m\overline{AC}$

(iii) $m\overline{AC} + m\overline{BC} > m\overline{AB}$

عمل: $\overrightarrow{BA}$ کو نقطہ D تک اس طرح بڑھایا کہ $\overline{AD} \cong \overline{AC}$

D اور C کو ملایئے۔

ثبوت:

بیانات	دلائل
1۔ ΔADC میں $\overline{AD} \cong \overline{AC}$	1۔ عمل
2۔ $\therefore m\angle 1 = m\angle 2$	2۔ متماثل اضلاع کے متقابل زاویے
3۔ لیکن $m\angle 1$ $m\angle BCD$	3۔ $m\angle BCD = m\angle BCA + m\angle 1$

4- $\therefore m\angle BCD > m\angle 2$	4- نابرابری کی خاصیت متعدیت
5- $\triangle ABC$ میں $m\overline{BD} > m\overline{BC}$	5- بڑے زاویے کا متقابلہ ضلع بڑا ہوتا ہے (مسئلہ 1 الف)
6- لیکن $m\overline{BD} = m\overline{AB} + m\overline{AD}$ $= m\overline{AB} + m\overline{AC}$	6- عمل
7- $\therefore m\overline{AB} + m\overline{AC} > m\overline{BC}$	7- (5) میں $\overline{BD}$ کی قیمت رکھنے سے
8- اسی طرح ہم ثابت کر سکتے ہیں۔ کہ $m\overline{AB} + m\overline{BC} > m\overline{AC}$ اور $m\overline{BC} + m\overline{AC} > m\overline{AB}$	8- مندرجہ بالا طریقہ کار سے

فہو المطلوب

مشق 8.19

1- کسی چوکور کے اضلاع کا مجموعہ اس کے وتروں کے مجموعے سے بڑا ہوتا ہے۔

2- کسی چوکور کے تین اضلاع ایک ساتھ چوتھے سے بڑے ہوتے ہیں۔

3- کسی مثلث کی اساس کے سروں سے اس کے اندرونے میں کسی نقطے تک کھینچے گئے۔
قطعات کا مجموعہ اس کے دیگر دو اضلاع کے مجموعے سے کم ہوتا ہے۔

4- ثابت کیجیے کہ کسی مثلث کے کوئی دو اضلاع ایک ساتھ تیسرے ضلع پر وسطانیہ کا دگنا ہوتے ہیں۔

5- ثابت کیجیے کہ کسی مثلث کے وسطانیوں کا مجموعہ اس کے اضلاع کے مجموعے سے کم ہوتا ہے۔
(اشارہ: سوال 4 کے نتیجے کو استعمال کیجیے)

6- کسی مثلث کے کوئی دو اضلاع کا فرق تیسرے ضلع سے کم ہوتا ہے۔

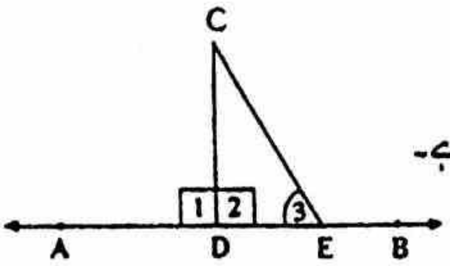
مسئلہ 3

کسی نقطے سے جو کسی خط کے باہر واقع ہو، خط تک عمود سب سے کم فاصلہ ہوتا ہے۔

یا

کسی نقطے سے جو خط پر نہ ہو، خط تک کھینچے گئے تمام قطعات میں سے عمود سب سے چھوٹا ہوتا ہے۔

معلوم: نقطہ C سے $\overline{CD}$ خط AB پر عمود کھینچا گیا ہے۔ جو نقطہ D پر ملتا ہے۔
اور $\overline{CE}$ ایک دوسرا قطعہ ہے جو $\overleftrightarrow{AB}$ کو نقطہ E پر ملتا ہے۔



مطلوب: $m\overline{CD} < m\overline{CE}$

ثبوت:

دلائل	بیانات
1۔ بیرونی زاویے کی تعریف کی رو سے	1۔ $\angle 1$ مثلث CDE کا بیرونی زاویہ ہے
2۔ بیرونی زاویہ متقابلہ اندرونی زاویے سے بڑا ہوتا ہے	2۔ $\therefore m\angle 1 > m\angle 3$
3۔ $m\angle 1 = m\angle 2$ (قائمہ زاویے)	3۔ $\therefore m\angle 2 > m\angle 3$
4۔ بڑے زاویے کا متقابلہ ضلع (مسئلہ 1 (الف))	4۔ $\therefore m\overline{CE} > m\overline{CD}$ یعنی $m\overline{CD} < m\overline{CE}$
5۔ مندرجہ بالا طریقہ کار سے	5۔ اسی طرح یہ ثابت کیا جا سکتا ہے کہ $m\overline{CD}$ کسی دوسرے قطعہ جو C سے $\overleftrightarrow{AB}$ تک کھینچا گیا ہو، کم ہے

فہو المطلوب

مشق 8.20

1۔ ثابت کیجیے کہ کسی مثلث کے دو اضلاع ایک ساتھ عمود کے دگنے سے زیادہ ہوتے ہیں جسے راس جہاں دونوں اضلاع ملتے ہیں، سے متقابلہ ضلع پر کھینچا گیا ہے۔

2۔ کسی مثلث کا احاطہ اس کے تینوں عمودوں کے مجموعے سے بڑا ہوتا ہے۔

3۔ کسی متماثل الساقین مثلث کے متماثل اضلاع ایک ساتھ اساس پر وسطانیہ کے دگنے سے بڑے ہوتے ہیں۔

4۔ کسی خط پر اس سے باہر دیئے گئے نقطے سے زیادہ سے زیادہ دو متماثل قطعات کھینچے جا سکتے ہیں۔

5۔ کسی متماثل الساقین مثلث کے راس سے اساس کے کسی نقطے تک کھینچا گیا قطعہ خط متماثل اضلاع میں سے ہر ایک سے کم ہوتا ہے۔

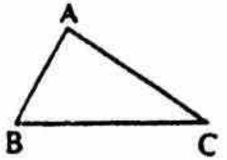
6۔ کسی مثلث کا کوئی سا ضلع اس کے تین اضلاع کے مجموعے کے نصف سے کم ہوتا ہے۔

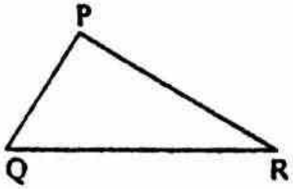
8.17 متشابہ اشکال

دو کثیر اضلاع متشابہ (Similar) کہلاتی ہے اگر ان کے درمیان ایک ایک مطابقت میں:

(i) ان کے متناظرہ اضلاع متناسب ہوں اور

(ii) ان کے متناظرہ زاویے متماثل ہوں۔





مثال 1: $\Delta ABC \longleftrightarrow \Delta PQR$ میں

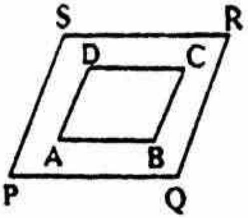
$$\angle C \cong \angle R,\ \angle B \cong \angle Q,\ \angle A \cong \angle P$$

اور

$$\frac{m\overline{AB}}{m\overline{PQ}} = \frac{m\overline{AC}}{m\overline{PR}} = \frac{m\overline{BC}}{m\overline{QR}}$$

پس $\Delta ABC, \Delta PQR$ کے متشابہ ہے۔ علامتی طور پر اسے اس طرح لکھتے ہیں:

$$\Delta ABC \sim \Delta PQR$$



مثال 2: $||^{gm}ABCD \longleftrightarrow ||^{gm}PQRS$ میں

$$<A = <P,\ <B = <Q,\ <C = <R \text{ اور } <D = <S$$

اور

$$\frac{m\overline{AB}}{m\overline{PQ}} = \frac{m\overline{BC}}{m\overline{QR}} = \frac{m\overline{DC}}{m\overline{SR}} = \frac{m\overline{AD}}{m\overline{SP}}$$

پس $||^{gm}PQRS \sim ||^{gm}ABCD$ میں

مزید یہ کہ جب بھی مقداریں تناسب میں ہوں تو ہم ہمیشہ ایک مقدار کو دوسری کے اضعاف (Multiple) میں ظاہر کر سکتے ہیں۔

مثلاً اگر $\frac{m\overline{AB}}{m\overline{PQ}} = \frac{m\overline{CD}}{m\overline{RS}} = K$

تو $m\overline{AB} = K(m\overline{PQ})$ اور $m\overline{CD} = K(m\overline{RS})$

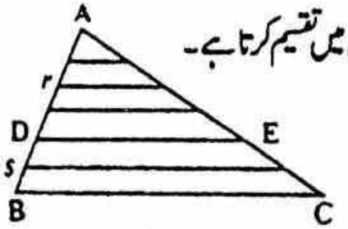
جبکہ K مثبت حقیقی عدد ہے۔

نوٹ:

1۔ مثلثوں کے تشابہ کے لئے دو شرائط میں سے صرف ایک کا پورا ہونا کافی ہے۔

2۔ چار یا زائد اضلاع والے کثیر الاضلاع کے تشابہ کے لئے دونوں شرائط کو پورا ہونا ضروری ہے۔

مسئلہ 4



کسی مثلث کے ایک ضلع کے متوازی خط باقی دو اضلاع کو تناسب حصوں میں تقسیم کرتا ہے۔

معلوم: ΔABC میں $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$

مطلوب: $m\overline{AD} : m\overline{DB} = m\overline{AE} : m\overline{EC}$

عمل: فرض کیجیے کہ لمبائی کی اکائی اس طرح اختیار کی گئی ہے کہ $m\overline{AD} = r$ اور $m\overline{BD} = s$ جبکہ r اور s غیر صفر مکمل اعداد ہیں۔
$\overline{AD}$ کو r متماثل قطعات میں اور $\overline{BD}$ کو s متماثل قطعات میں اس طرح تقسیم کیا کہ $\frac{r}{s} = \frac{m\overline{AD}}{m\overline{DB}}$ نقاط تقسیم سے $\overline{BC}$ کے متوازی خطوط کھینچے گئے ہیں۔

ثبوت:

بیانات	دلائل
1۔ متوازی خطوط $\overline{AD}$ کو r متماثل قطعات تقسیم کرتے ہیں۔	1 عمل
2۔ پس یہی متوازی خطوط دوسرے خط قاطع $\overline{AE}$ کو r متماثل قطعات تقسیم کرتے ہیں۔	2۔ مسئلہ 15 (نویں کی ریاضی کی کتاب ملاحظہ کیجیے)
3۔ اسی طرح $\overline{EC}$ کو s متماثل قطعات میں تقسیم کیا گیا ہے	3۔ $\overline{BD}$ کو s متماثل قطعات میں متوازی خطوط نے تقسیم کیا ہے۔
4۔ پس $\frac{m\overline{AE}}{m\overline{EC}} = \frac{ra}{sa}$ یہاں متماثل قطعات میں سے ہر ایک کی مقدار ہے۔ یا $\frac{m\overline{AE}}{m\overline{EC}} = \frac{r}{s}$	4۔ اوپر (2) اور (3) سے
5۔ لیکن $\frac{m\overline{AD}}{m\overline{DB}} = \frac{r}{s}$	5۔ عمل
6۔ $\therefore \frac{m\overline{AD}}{m\overline{DB}} = \frac{m\overline{AE}}{m\overline{EC}}$ یا $m\overline{AD} : m\overline{DB} = m\overline{AE} : m\overline{EC}$	6۔ برابری کی خاصیت متعدیت (ہر ایک $\frac{r}{s}$ کے مساوی ہے)

فہو المطلوب

نتیجہ صرتح 1۔ مسئلہ 4 کی شکل میں $\dfrac{m\overline{AD}}{m\overline{AB}} = \dfrac{m\overline{AE}}{m\overline{AC}}$

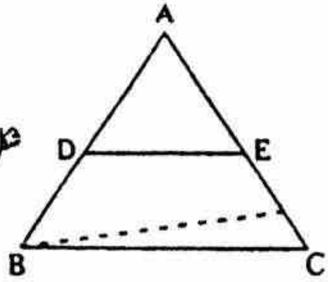
$$\left| \because \dfrac{m\overline{AD}}{m\overline{DB}} = \dfrac{m\overline{AE}}{m\overline{AC}} \Rightarrow \dfrac{m\overline{AE}}{m\overline{AD}+m\overline{DB}} = \dfrac{m\overline{AE}}{m\overline{AB}+m\overline{AC}} \right|$$

پہلے عکس نسبت پھر ترکیب نسبت کا استعمال کیا۔

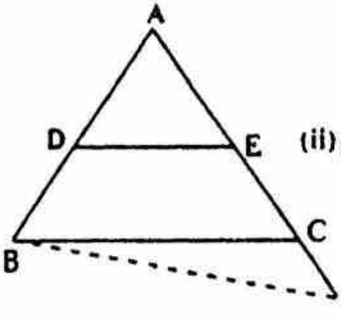
نتیجہ صرتح 2۔ اس طرح اوپر کی شکل میں $\dfrac{m\overline{AB}}{m\overline{DB}} = \dfrac{m\overline{AC}}{m\overline{EC}}$ ترکیب نسبت کے ذریعے

مسئلہ 4 (الف) (مسئلہ 4 کا عکس)

اگر کوئی خط کسی مثلث کے دو اضلاع کو متناسب قطعات میں تقسیم کرتا ہے تو وہ مثلث کے تیسرے ضلع کے متوازی ہوتا ہے۔



شکل (i)



شکل (ii)

معلوم: ΔABC میں $\overline{DE}$. $\overline{AB}$ اور $\overline{AC}$ کو بالترتیب نقاط D اور E پر اس طرح قطع کرتا ہے کہ $\dfrac{m\overline{AD}}{m\overline{DB}} = \dfrac{m\overline{AE}}{m\overline{EC}}$

مطلوب: $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$

اگر $\overline{DE}$، $\overline{BC}$ کے متوازی نہیں ہے تو $\overline{BK}$ کھینچیے جو $\overrightarrow{AC}$ کو بڑھانے سے نقطہ K پر ملتا ہے۔

بیانات	دلائل
1- ΔABK میں $\overline{DE} \parallel \overline{BK}$	1- عمل
2- $\therefore \dfrac{m\overline{AD}}{m\overline{DB}} = \dfrac{m\overline{AE}}{m\overline{EK}}$	2- مسئلہ 4
3- لیکن $\dfrac{m\overline{AD}}{m\overline{DB}} = \dfrac{m\overline{AE}}{m\overline{EC}}$	3- معلوم
4- $\therefore \dfrac{m\overline{AE}}{m\overline{EK}} = \dfrac{m\overline{AE}}{m\overline{EC}}$	4- ہر ایک $\dfrac{m\overline{AD}}{m\overline{DB}}$ کے مساوی ہے۔ (برابری کی خاصیت متعدیت)

5۔	یہ دلالت کرتا ہے کہ $\overline{EK} \cong \overline{EC}$ یا $m\overline{EK} = m\overline{EC}$	5۔	اگر مقدم برابر ہوں تو موخر بھی برابر ہوتے ہیں۔
6۔	یہ اسی وقت ممکن ہے جب C, K کے ساتھ منطبق ہوتا ہو۔	6۔	E دونوں میں مشترک نقطہ ہے۔
7۔	$\overline{DE} \parallel \overline{BC}$	7۔	ہمارا مفروضہ غلط ہے۔

نہوالمطلوب

نتیجہ صریح 1۔ مندرجہ بالا شکل سے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ

اگر $\dfrac{m\overline{AD}}{m\overline{DB}} = \dfrac{m\overline{AC}}{m\overline{EC}}$ تو $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$

نتیجہ صریح 2۔

اگر $\dfrac{m\overline{AD}}{m\overline{AB}} = \dfrac{m\overline{AE}}{m\overline{AC}}$ تو $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$

مشق 8.21

1۔ تین متوازی خطوط l، m، n، دیگر خطوط x اور y کو بالترتیب نقاط A، B، C اور P، Q، R پر قطع کرتے ہیں تو ثابت کیجیے کہ $\dfrac{m\overline{AB}}{m\overline{BC}} = \dfrac{m\overline{PQ}}{m\overline{QR}}$

2۔ ثابت کیجیے کہ کسی مثلث کے ایک ضلع کے وسطی نقطے سے اساس کے متوازی کھینچا گیا خط دوسرے ضلع کی تنصیف کرتا ہے۔

3۔ ذوزنقہ (Trapezium) ABCD کے وتر $\overline{AC}$ اور $\overline{BD}$ نقطہ O پر قطعہ کرتے ہیں۔
ثابت کیجیے کہ $m\overline{OA} : m\overline{OC} = m\overline{OB} : m\overline{OD}$

4۔ ثابت کیجیے کہ ذوزنقہ کے اضلاع کے متوازی کھینچا گیا خط غیر متوازی اضلاع کو متناسب حصوں میں تقسیم کرتا ہے۔

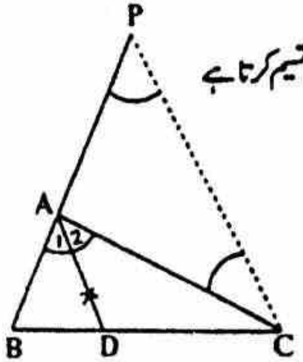
5۔ ثابت کیجیے کہ کسی مثلث کے دو اضلاع کے وسطی نقاط کو ملانے والا قطعہ خط تیسرے ضلع کے متوازی ہوتا ہے۔

6۔ ثابت کیجیے کہ ذوزنقہ کے غیر متوازی خطوط کو ایک ہی تناسب سے تقسیم کرنے والا خط تیسرے ضلع کے متوازی ہوتا ہے۔

7۔ ذوزنقہ کے غیر متوازی خطوط کی مقدار 8 سینٹی میٹر اور 14 سینٹی میٹر ہے۔ متوازی خطوط متوازی خط ذوزنقہ کے ارتفاع کو نسبت 3:1 میں تقسیم کرتا ہے۔ ذوزنقہ کے غیر متوازی خطوط پر اس خط سے بننے والے قطعات کی مقداریں معلوم کیجیے۔

8۔ ثابت کیجیے کہ کسی چوکور کے متواتر اضلاع کے وسطی نقاط کو ملانے والے قطعات متوازی الاضلاع بناتے ہیں۔

مسئلہ 5



مثلث کی کسی زاویے کا ناصف متقابلہ ضلع کو ان اضلاع کی لمبائیوں کی نسبت میں تقسیم کرتا ہے جن کے درمیان زاویہ ہے۔

معلوم: مثلث ABC کے زاویے BAC کا ناصف $\overline{AD}$ ہے۔

مطلوب: $\dfrac{m\overline{BD}}{m\overline{DC}} = \dfrac{m\overline{AB}}{m\overline{AC}}$

عمل: $\overline{AD}$ کے متوازی $\overrightarrow{CP}$ کھینچیے جو $\overline{BA}$ کو بڑھانے سے نقطہ P پر ملے۔

ثبوت:

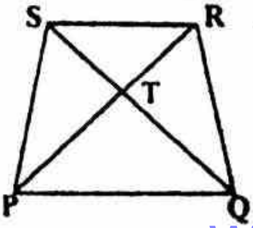
بیانات	دلائل
1- $\overline{AD} \parallel \overline{PC}$	1- عمل
2- $\therefore\ \angle 1 \cong \angle P$	2- متناظرہ زاویے
3- اسی طرح $\angle 2 \cong \angle 3$	3- متوازی خطوط کے متبادلہ زاویے
4- لیکن $\angle 1 \cong \angle 2$	4- معلوم
5- $\therefore\ \angle P \cong \angle 3$	5- خاصیت متعدیت
6- $\therefore\ \overline{AP} \cong \overline{AC}$	6- متماثل زاویوں کے متقابلہ اضلاع
7- مزید APC میں $\overline{AD} \parallel \overline{PC}$	7- عمل
8- $\therefore\ \dfrac{m\overline{BD}}{m\overline{DC}} = \dfrac{m\overline{AB}}{m\overline{AP}}$	8- مسئلہ 4
9- $\therefore\ \dfrac{m\overline{BD}}{m\overline{DC}} = \dfrac{m\overline{AB}}{m\overline{AC}}$	9- کیونکہ $\overline{AC} \cong \overline{AP}$ (اوپر ثابت کیا)

فہو المطلوب

مشق 8.22

1- اگر کسی مثلث کے راسی زاویے کا ناصف اساس کی تنصیف کرتا ہے تو مثلث متماثل الساقین ہوتا ہے۔

2- PQRS ایک چوکور ہے اور زاویوں Q اور S کا ناصف وتر $\overline{PR}$ کو نقطہ T پر ملتا ہے۔

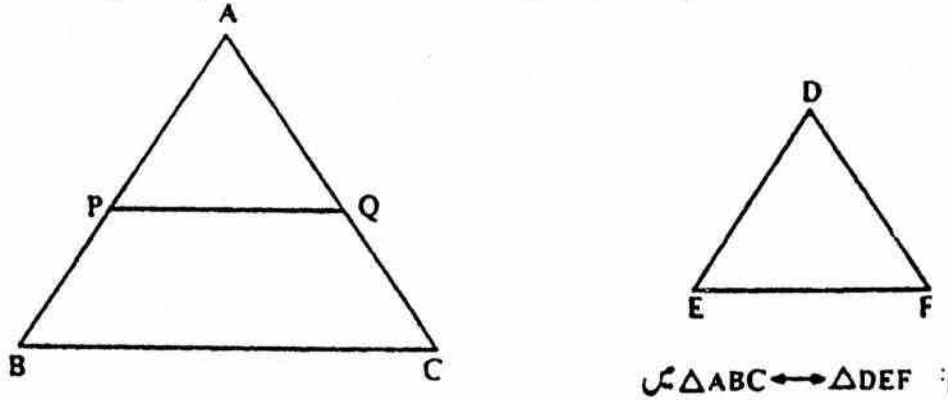


ثابت کیجیے۔ $\dfrac{m\overline{PQ}}{m\overline{QR}} = \dfrac{m\overline{PS}}{m\overline{RS}}$

3۔ متماثل الساقین مثلث ABC کی اساس کے زاویے B کی تنصیف کرتے ہوئے قطعہ خط مخالف ضلع AC کے نقطہ D پر ملتا ہے اور D سے $\overline{BC}$ کے متوازی $\overline{DE}$ کھینچا جو $\overline{AB}$ کو E پر قطع کرتا ہے۔ ثابت کیجیے کہ $\overline{CE}$ زاویہ ACB کی تنصیف کرتا ہے۔

مسئلہ 6

اگر دو مثلثیں متماثل الزاویہ (Equiangular) ہوں تو ان کے متناظر اضلاع متناسب ہوتے ہیں۔



معلوم: $\triangle ABC \leftrightarrow \triangle DEF$ میں

$\angle A \cong \angle D$ ، $\angle B \cong \angle E$ اور $\angle C \cong \angle F$

مطلوب: $\dfrac{m\overline{AB}}{m\overline{DE}} = \dfrac{m\overline{BD}}{m\overline{EF}} = \dfrac{m\overline{AC}}{m\overline{DF}}$

عمل: $\overline{AB}$ اور $\overline{AC}$ سے $\overline{AP}$ اور $\overline{AQ}$ اس قطع کیجیے کہ $\overline{AP} \cong \overline{DE}$ اور $\overline{AQ} \cong \overline{DF}$ ، P اور Q کو ملائیے۔

ثبوت:

بیانات	دلائل
1. $\triangle APQ \leftrightarrow DEF$ میں	1.
(i) $\overline{AP} \cong \overline{DE}$	(i) عمل
(ii) $\angle A \cong \angle D$	(ii) معلوم
(iii) $\overline{AQ} \cong \overline{DF}$	(iii) عمل
2. $\therefore \triangle APQ \cong \angle DEF$	2. ض۔ز۔ض = ض۔ز۔ض
3. $\therefore \angle APQ \cong \angle E$	3. مثلثوں کے تماثل کی رو سے
4. لیکن $\therefore \angle B \cong \angle E$	4. معلوم
5. $\therefore \angle APQ \cong \angle B$	5. ہر ایک $\angle E$ کے متماثل ہے

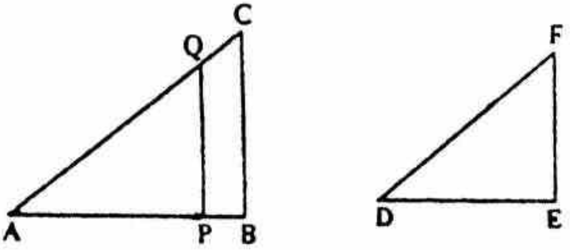
6- $\therefore \overline{PQ} \parallel \overline{BC}$	6- متناظرہ زاویے متماثل ہیں۔
7- $\therefore \dfrac{m\overline{AB}}{m\overline{AP}} = \dfrac{m\overline{AC}}{m\overline{AQ}}$	7- مسئلہ 4 نتیجہ صریح 1
8- یا $\dfrac{m\overline{AB}}{m\overline{DE}} = \dfrac{m\overline{AC}}{m\overline{DF}}$	8- چونکہ $\overline{AP} \cong \overline{DE}$ اور $\overline{AQ} \cong \overline{DF}$
9- اس طرح $\dfrac{m\overline{AB}}{m\overline{DE}} = \dfrac{m\overline{BC}}{m\overline{EF}}$	9- مندرجہ بالا طریقہ کار سے
10- پس $\dfrac{m\overline{AB}}{m\overline{DE}} = \dfrac{m\overline{BC}}{m\overline{EF}} = \dfrac{m\overline{AC}}{m\overline{DF}}$	10- (8) اور (9) کو اکٹھا کرتے ہوئے

ثبت المطلوب

مسئلہ 6 (الف)

(مسئلہ 6 کا عکس)

اگر دو مثلثوں کی دی ہوئی مطابقت میں ان کے متناظر اضلاع متناسب ہیں تو ان کے متناظرہ زاویے متماثل ہوتے ہیں۔



معلوم: $\triangle ABC \longleftrightarrow DEF$ میں

$$\frac{m\overline{AB}}{m\overline{DE}} = \frac{m\overline{BC}}{m\overline{EF}} = \frac{m\overline{AC}}{m\overline{DF}}$$

مطلوب: $\angle A \cong \angle D$, $\angle B \cong \angle E$, $\angle C \cong \angle F$

عمل: $\overline{AB}$ اور $\overline{AC}$ سے $\overline{AP}$ اور $\overline{AQ}$ اس قطع کیجیے کہ $\overline{AP} \cong \overline{DE}$ اور $\overline{AQ} \cong \overline{DF}$، P اور Q کو ملایئے۔

ثبوت:

بیانات	دلائل
1- $\therefore \dfrac{m\overline{AB}}{m\overline{DE}} = \dfrac{m\overline{AC}}{m\overline{DF}}$	1- معلوم
2- $\therefore \dfrac{m\overline{AB}}{m\overline{AP}} = \dfrac{m\overline{AC}}{m\overline{AQ}}$	2- چونکہ $\overline{DE} \cong \overline{AP}$ اور $\overline{DF} \cong \overline{AQ}$ (عمل)
3- $\therefore \overline{PQ} \parallel \overline{BC}$	3- مسئلہ 4 (الف) کی رو سے
4- $\therefore \angle APQ \cong \angle B$, $\angle AQP \cong \angle C$	4- متوازی خطوط کے متناظرہ زاویے

5۔ $\angle A \cong \angle A$ اور	5۔ ذاتی تماثل
6۔ چونکہ ΔAPQ اور ΔABC مساوی الزاویہ ہیں	6۔ متناظرہ زاویے متماثل ہیں
7۔ $\therefore \dfrac{m\overline{AB}}{m\overline{AP}} = \dfrac{m\overline{BC}}{m\overline{PQ}}$ یا $\dfrac{m\overline{AB}}{m\overline{DE}} = \dfrac{m\overline{BC}}{m\overline{PQ}}$	7۔ مسئلہ 6 کی رو سے $\overline{DE} \cong \overline{AP}$
8۔ $\therefore \dfrac{m\overline{AB}}{m\overline{DE}} = \dfrac{m\overline{BC}}{m\overline{EF}}$	8۔ معلوم
9۔ $\therefore \dfrac{m\overline{BC}}{m\overline{PQ}} = \dfrac{m\overline{BC}}{m\overline{EF}}$	9۔ برابری کی خاصیت متعدیت
10۔ یعنی $m\overline{PQ} \cong m\overline{EF}$	10۔ مقدم برابر ہیں موخر ضرور برابر ہوتے ہیں
11۔ اب $\Delta APQ \leftrightarrow \Delta DEF$ میں	11۔
(i) $\overline{AP} \cong \overline{DE}$	(i) عمل
(ii) $\overline{AQ} \cong \overline{DF}$	(ii) عمل
(iii) $\overline{PQ} \cong \overline{EF}$	(iii) اوپر (10) میں ثابت کیا
12۔ $\therefore \Delta APQ \cong \Delta DEF$	12۔ ض۔ض۔ض $\cong$ ض۔ض۔ض
13۔ $\angle A \cong \angle D$ ، $\angle P \cong \angle E, \angle Q \cong \angle F$	13۔ مثلثوں کے تماثل کی رو سے
14۔ پس $\angle A \cong \angle D$ ، $\angle P \cong \angle E, \angle C \cong \angle F$	14۔ $\angle AQP \cong \angle C$ ، $\angle APQ \cong \angle B$ اوپر (4) میں ثابت کیا۔

نہوالمطلوب

مشق 8.23

1۔ اگر دو مثلثوں میں ایک کے تین اضلاع دوسری کے متناظرہ تین اضلاع کے متوازی ہوں تو ثابت کیجیے کہ ان کے اضلاع متناسب ہیں۔

2۔ دو قائمۃ الزاویہ مثلثوں میں ان کے اضلاع متناسب ہوں گے اگر ایک کا حادہ زاویہ دوسری کے حادہ زاویے کے متماثل ہو۔

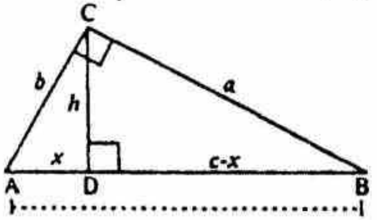
3۔ کسی مثلث کے اضلاع کے وسطی نقاط کو ملانے والے قطعات ایک مثلث تشکیل دیتے ہیں جو کہ اصل مثلث کے مشابہ ہوتی ہے۔

4۔ قائمۃ الزاویہ مثلث میں قائمہ زاویے سے وتر پر کھینچا گیا عمود مثلث کو دو حصوں میں تقسیم کرتا ہے۔ ہر حصہ اصل مثلث کے مشابہ ہوتا ہے۔

8.18 مسئلہ فیثاغورث (Pythagoras Theoram)

مسئلہ 7

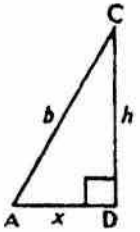
قائمۃ الزاویہ مثلث میں وتر کی لمبائی کا مربع دیگر دو اضلاع کی لمبائیوں کے کے مربعوں کے مجموعہ کے برابر ہوتا ہے۔

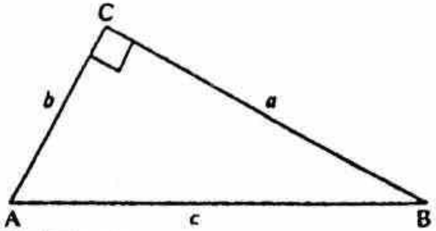


معلوم: مثلث ΔABC میں $\angle C$ قائمہ زاویہ ہے۔
وتر کی لمبائی c ہے اور $\overline{BC}$ اور $\overline{AC}$
کی لمبائیاں بالترتیب a اور b ہیں۔

مطلوب: $(m\overline{AC})^2 + (m\overline{BC})^2 = (m\,\overline{AB})^2$ یعنی $c^2 = a^2 + b^2$

عمل: $\overline{AB}$ پر ایک عمود $\overline{CD}$ کھینچا جو $\overline{AB}$ کے نقطہ D پر ملتا ہے۔ فرض کیجیے $m\overline{CD} = h$ اور $m\overline{AD} = x$
تو $m\,\overline{BD} = c - x$ مندرجہ ذیل اشکال کو مدنظر رکھیے۔





ثبوت:

بیانات	دلائل
1- $\Delta ACB \longleftrightarrow \Delta ADC$ میں	1-
(i) $\angle A \cong \angle A$	(i) ذاتی تماثل
(ii) $\angle ADC \cong \angle ACB$	(ii) ہر ایک زاویہ قائمہ ہے
2- $\angle ACD \cong \angle B$	2- مسئلہ 5 نتیجہ صریح 6 (نویں کی ریاضی کی کتاب ملاحظہ کیجیے)
3- لہذا $\Delta ADC \cong \Delta ACB$	3- مسئلہ 6 کی رو سے
اور $\dfrac{m\overline{AD}}{m\overline{AC}} = \dfrac{m\overline{AC}}{m\overline{AB}}$	
یعنی $\dfrac{x}{b} = \dfrac{b}{c}$	
$\Rightarrow b^2 = cx \quad \ldots (I)$	وسطین کا حاصل ضرب = طرفین کا حاصل ضرب
4- اسی طرح $\Delta BCD \sim \Delta ABC$	4- مندرجہ بالا طریقہ کار سے

-5 $\therefore \dfrac{m\overline{BD}}{m\overline{BC}} = \dfrac{m\overline{BC}}{m\overline{AB}}$ $\Rightarrow \dfrac{c-x}{a} = \dfrac{a}{c}$ $\Rightarrow a^2 = c(c-x)$ $\Rightarrow a^2 = c^2 - cx \ldots (ii)$	-5 مسئلہ 6 کی رو سے وسطین کا حاصل ضرب = طرفین کا حاصل ضرب خاصیت تقسیمی
-6 $\therefore a^2 + b^2 = c^2 - cx + cx$ $\Rightarrow a^2 + b^2 = c^2$ یا $c^2 = a^2 + b^2$ یا $(m\overline{AB})^2 = (m\overline{BC})^2 + (m\overline{AC})^2$	-6 (i) اور (ii) کو جمع کرتے ہوئے برابری کی خاصیت تشاکل

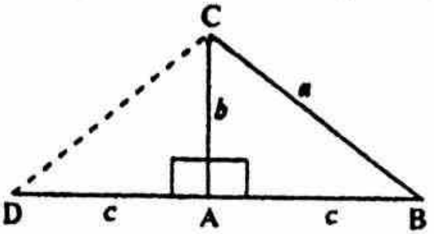
فہو المطلوب

نتیجہ صریح: اگر قائمہ مثلث میں قائمہ زاویے کے راس سے وتر پر عمود کھینچا جائے تو باقی دونوں اضلاع میں سے کسی ایک کا مربع وتر اور اس ضلع کے متصل قطعہ کے تحت بننے والے مستطیل کے برابر ہوتا ہے۔

مسئلہ 7 (الف)

(مسئلہ 7 کا عکس)

اگر کسی مثلث کے دو اضلاع کی لمبائیوں کے مربعوں کا مجموعہ تیسرے ضلع کی لمبائی کے مربع کے برابر ہو تو مثلث قائمۃ الزاویہ مثلث ہوتی ہے۔



معلوم: $\triangle ABC$ میں $(m\overline{BC})^2 = (m\overline{AC})^2 + (m\overline{AB})^2$

یعنی $a^2 = b^2 + c^2$

جبکہ $\overline{BC}$، $\overline{AC}$ اور $\overline{AB}$ کی بالترتیب لمبائیاں a, b اور c ہیں۔

مطلوب: $m\angle CAB = 90^\circ$

یعنی $\triangle ABC$ قائمۃ الزاویہ مثلث ہے۔

عمل: $\overline{AC}$ کے نقطے A پر عمود $\overline{AD}$ اس طرح گرایئے کہ $m\overline{AD} = m\overline{AB}$

C اور D کو ملایئے۔

ثبوت:

	بیانات		دلائل
-1	قائمۃ الزاویہ مثلث CAD میں	-1	
	$(m\overline{CD})^2 = (m\overline{AC})^2 + (m\overline{AD})^2$		مسئلہ فیثا غورث
	$= b^2 + c^2$		
	$= a^2$		معلوم: $a^2 = b^2 + c^2$
-2	$m\overline{CD} = a$	-2	دونوں اطراف کا جذر المربع لینے
	$= m\overline{BC}$		معلوم: $m\overline{BC} = a$
-3	$\Delta CAD \leftrightarrow \Delta CAB$ میں	-3	
(i)	$\overline{DC} \cong \overline{BC}$	(i)	اوپر (2) میں ثابت کیا
(ii)	$\overline{AD} \cong \overline{AB}$	(ii)	عمل
(iii)	$\overline{CA} \cong \overline{CA}$	(iii)	مشترک
-4	$\therefore\ \Delta CAD \leftrightarrow \Delta CAB$	-4	ض۔ض۔ض ≅ ض۔ض۔ض
-5	$\therefore\ \angle CAD \cong \angle CAB$	-5	مثلثوں کے تماثل کی رو سے
-6	لیکن $m\angle CAD = 90^\circ$	-6	عمل
-7	$\therefore\ m\angle CAD = 90^\circ$	-7	چونکہ $\angle CAB = \angle CAD$
-8	پس ΔABC ایک قائمۃ الزاویہ مثلث ہے	-8	اس کا ایک زاویہ قائمہ ہے۔

فہو المطلوب

مشق 8.24

1۔ مثلث کے اضلاع کی مقداریں دی گئی ہیں اس میں کون سا قائمۃ الزاویہ مثلث ہے اور کیوں؟

(i) 5cm, 4cm, 3cm (ii) 10cm, 8cm, 6cm

(iii) 13cm, 12cm, 5cm (iv) $(x^2 + y^2)$ اکائیاں، $(2xy)$ اکائیاں، $(x^2 - y^2)$ اکائیاں

(v) 8, 7, 6 اکائیاں

2۔ 60 فٹ اونچی دیوار کے ساتھ 65 فٹ لمبی سیڑھی کا اوپر کا حصہ لگا ہوا ہے۔ سیڑھی کے نیچے کا حصہ دیوار سے کتنی دور ہے؟

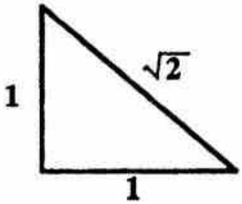
3 - (الف) متماثل الاضلاع مثلث کے ہر ضلع کی لمبائی 6 اکائیاں ہے۔، مثلث کے ایک ارتفاع کی لمبائی معلوم کیجیے۔

(ب) متماثل الاضلاع مثلث کے ہر ضلع کی لمبائی 2x اکائیاں ہے۔ مثلث کے ہر ارتفاع کی لمبائی معلوم کیجیے۔

4 - مسئلہ فیثا غورث کا استعمال کرتے ہوئے مندرجہ ذیل قطعات کھینچیے۔

$\sqrt{13}, \ \sqrt{17}, \ \sqrt{5}, \ \sqrt{2},$

(اشارہ: ہر عدد کو دو حصوں میں اس طرح توڑیے کہ ہر حصہ ایک مکمل مربع مثلاً $2 = 1^2 + 1^2$, $13 = 2^2 + 3^2$ وغیرہ پھر ان اضلاع اور ان کے درمیان قائمہ زاویہ لیتے ہوئے مثلث بنائے وتر $\sqrt{2}$ $\sqrt{13}$ وغیرہ ہوگی یعنی



5 - $\triangle ABC$ کے اضلاع $\overline{AC}$ اور $\overline{BC}$ پر P اور Q بالترتیب نقاط ہیں اور زاویہ قائمہ نقطہ C پر ہے ثابت کیجیے۔

$$(m\overline{AQ})^2 + (m\overline{AB})^2 = (m\overline{AB})^2 + (m\overline{AQ})^2$$

6 - چوکور ABCD کے وتر زاویہ قائمہ پر قطع کرتے ہیں۔ ثابت کیجیے۔

$$(m\overline{AB})^2 + (m\overline{CD})^2 = (m\overline{BC})^2 + (m\overline{AD})^2$$

7 - ثابت کیجیے کہ معین *(Rhombus)* کے اضلاع کے مربعوں کا مجموعہ اس کے وتر کے مربعوں کے مجموعہ کے برابر ہوتا ہے۔

متفرق مشق VIII

1 - خالی جگہ پُر کیجیے۔

(i) دو مختلف نقاط ______ کا تعین کرتے ہیں۔

(ii) ہر خط کم از کم ______ مختلف نقاط رکھتا ہے۔

(iii) ہر مستوی کم از کم ______ غیر ہم خط نقاط پر مشتمل ہوتی ہے۔

(iv) دو متقاطع خطوط ایک ہی خط کے توازی نہیں ہو سکتے ______ کا اصول موضوعہ کہلاتا ہے۔

(v) متشابہ مثلثوں میں ______ متماثل ہوتے ہیں۔

(vi) کسی مثلث میں اس کے دو اضلاع کی مقداریں کا مجموعہ ہمیشہ ________ ضلع سے بڑا ہوتا ہے۔

(vii) کسی خط کے باہر کسی نقطے سے ________ سب سے چھوٹا فاصلہ ہوتا ہے۔

(viii) ΔABC میں $m\angle B = 90^\circ$ تو $a^2 + c^2 =$ ________

(ix) کسی قائمہ مثلث میں ________ تمام اضلاع میں سب سے بڑا ہوتا ہے۔

(x) کسی مثلث کے ایک زاویے کا ________ اس کے متقابلہ ضلع کو ان اضلاع کی لمبائیوں کی نسبت میں تقسیم کرتا ہے جن کے درمیان زاویہ ہے۔

2۔ درست اور غلط بیانات کی نشاندہی کیجیے۔

(i) مثلث جس کے اضلاع کی لمبائیاں 6، 8 اور 10 اکائیاں ہیں قائمہ الزاویہ مثلث ہے۔

(ii) مثلث جس کے اضلاع 1cm، 2cm اور 3cm لمبے ہیں مثلث نہیں ہے۔

(iii) ΔABC میں $m\angle C = 90^\circ$ ہے تو $\angle A$ اور $\angle B$ سپلیمنٹری زاویے ہوتے ہیں۔

(iv) اگر دو مثلثیں متشابہ ہوں تو وہ ہمیشہ متماثل ہوتی ہیں۔

(v) اگر وتر کی لمبائی کا مربع دیگر دو اضلاع کی لمبائیوں کے مربعوں کے برابر ہے تو یہ قائمہ الزاویہ مثلث متماثل الساقین ہو سکتی ہے۔

جوابات

مشق 1.1

1. (a) $\{3, 4, 5\}; \{x \mid x \in Z^+ \wedge 2 < x < 6\}$

(b) $\{5, 10, 15\}; \{y \mid y \in Z^+ \wedge$ جبکہ y 20 سے چھوٹا اور 5 سے تقسیم پذیر ہے $\}$

(c) $\{5, 6, 7, 8, 9, 10, 11\}; \{z \mid z \in N \wedge 4 < z < 12\}$

(d) $\{2, 3, 5, 7, 11, 13\}; \{t \mid t \in P \wedge 2 \leq t \leq 13\}$

2. $A = \emptyset$; $B = \{0\} \neq \emptyset$; $C = \emptyset$; $D = \emptyset$

3. (a) متناہی (b) متناہی (c) متناہی (d) غیر متناہی
(e) غیر متناہی (f) متناہی

4. $\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}$

5. (a) $\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{d\}, \{a,b\}, \{a,c\}, \{a,d\}, \{b,c\}, \{b,d\}, \{c,d\}, \{a,b,c\}, \{a,b,d\}, \{a,c,d\}, \{b,c,d\}$

(b) $A = \{a, b, c, d\}$ (c) $\{b\}; \{a, b, c\}$ (d) $\{a, b\}; \{a, b, d\}$

نوٹ: (c) اور (d) کے لیے ان سیٹوں کے علاوہ بھی سیٹ ہو سکتے ہیں۔

6. $\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{d\}, \{a,b\}, \{a,c\}, \{a,d\}, \{b,c\}, \{b,d\}, \{c,d\}, \{a,b,c\}, \{a, b, d\}, \{a,c,d\}, \{b,c,d\}, \{a,b,c,d\}$; $|P(A)| = 16$

7. جی ہاں، خالی سیٹ
8. ایسا سیٹ جس کا صرف ایک رکن ہو۔

9. $2^{10} = 1024$
10. $\{x \in N \mid x + 7 = 0\}$

11. $B = \{1, 2, 3\}, C = \{2,3\}, D = \{3\}$:

نوٹ: سوال 10 اور 11 کے لیے ان سیٹوں کے علاوہ بھی سیٹ ہو سکتے ہیں۔

12. (a) $A \sim B$ (b) $A \nsim B$ (c) $A \sim B$

مشق 1.2

(1)	{b,d,g}	(2)	{a,b,c}	(3)	{e,f}	(4)	{b}
(5)	{a,c}	(6)	{b}	(7)	U	(8)	ø
(9)	A	(10)	B	(11)	ø	(12)	U
(13)	ø	(14)	ø	(15)	A		

مشق 1.3

1. (i) {(a,y), (a,z), (b,y), (b,z), (c,y), (c,z), (d,y), (d,z)}
   (ii) {(y,a), (y,b), (y,c), (y,d), (z,a), (z,b), (z,c), (z,d)}
   (iii) {(a,a), (a,b), (a,c), (a,d), (b,a), (b,b), (b,c), (b,d), (c,a), (c,b), (c,c), (c,d), (d,a), (d,b), (d,c), (d,d)}
   (iv) {(y,y), (y,z),(z,y), (z,z)}

2. $x = 3, y = 1$

3. (i) {(a,2), (a,3), (a,4), (b,2), (b,3), (b,4)}
   (ii) {(a,2), (a,3), (b,2), (b,3), (a,4), (b,4)}
   (iii) {(a,3), (b,3)} (iv) {(a,3), (b,3)}

4. (i) {(a,2), (b,2)} (ii) {(a,4), (b,4)} (iii) {(a,2), (a,4), (b,2), (b,4)}

5. (i) {(1,4), (1,5), (3,4), (3,5)} (ii) {(2,2), (2,6),(4,2), (4,6)}
   (iii) {(2,2), (2,6),(4,2), (4,6)}
   (iv) {(1,2), (1,4), (1,5), (1,6), (2,4), (2,5), (3,2), (3,4) (3,5), (3,6),(4,4), (4,5)}
   (v) {(1,2), (1,6), (3,2), (3,6), (5,2), (5,6), (6,2), (6,6)}
   (vi) {(2,1), (2,4), (2,6), (2,8), (3,1), (3,2), (3,3), (3,4), (4,2), (4,3), (4,6), (4,8), (5,2), (5,3), (5,6), (5,8), (6,1), (6,4), (6,6), (6,8), (8,1), (8,2), (8,3), (8,4)}

6. (i) $\{(a,x), (b,x)\}$: $\{(b,x), (b,y), (c,y)\}$

(ii) $\{(y,a), (y,c)\}$; $\{(x,a), (x,b), (x,c)\}$

(iii) $\{(a,a), (b,b)\}$; $\{(a,b), (a,c), (c,c)\}$; $\{(b,a), (b,c), (c,a)\}$

نوٹ: (i) ، (ii) اور (iii) کے ان کے علاوہ دوسرے ربط بھی لکھے جا سکتے ہیں۔

(iv) $\varnothing$; $\{(x,x)\}$;$\{(y,y)\}$; $\{(x,y)\}$; $\{(y,x)\}$; $\{(x,x), (x,y)\}$; $\{(x,x), (y,x)\}$; $\{(x,x), (y,y)\}$;
$\{(x,y), (y,x)\}$; $\{(x,y), (y,y)\}$; $\{(y,x), (y,y)\}$; $\{(x,x), (x,y), (y,x)\}$;
$\{(x,x), (x,y), (y,y)\}$; $\{(x,x), (y,x), (y,y)\}$; $\{(x,y), (y,x), (y,y)\}$
$\{(x,x), (x,y), (y,x), (y,y)\}$.

7. $2^{12} = 4096$

8. (i) $\{(1,1), (2,2), (3,3)\}$ (ii) $\{(1,3), (2,2), (3,1), (4,0)\}$

(iii) $\{(1,0), (2,0), (2,1), (3,0), (3,1), (3,2), (4,0), (4,1), (4,2), (4,3)\}$

(iv) $\{(1,0), (2,0), (3,0), (4,0), (1,1), (1,2), (1,3), (2,2), (3,3)\}$

9. Dom $R_1 = \{1, 2, 3, 4\}$, Range $R_1 = \{2, 4, 6, 8\}$

Dom $R_2 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ Range $R_2 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$

Dom $R_3 = \{x \mid x \in N \wedge x \geq 9\}$; Range $R_3 = N$

10. Range $R = \{-2, 0, 2, 4\}$ 11. Range $R = \{0, 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, \ldots\}$

12. R_1 ایک۔ایک 'پر' تفاعل ہے اور R_2 ، R_3 ، R_4 تفاعل نہیں ہیں۔

13. $\varnothing$, $\{(0,0)\}$, $\{(0,1)\}$, $\{(1,0)\}$, $\{(1,1)\}$, $\{(0,0),(0,1)\}$, $\{(0,0),(1,0)\}$, $\{(0,0),(1,1)\}$, $\{(0,1),(1,0)\}$, $\{(0,1),(1,1)\}$, $\{(1,0),(1,1)\}$, $\{(0,0),(0,1),(1,0)\}$, $\{(0,0),(0,1),(1,1)\}$, $\{(0,0), (1,0), (1,1)\}$, $\{(0,1), (1,0), (1,1)\}$, $\{(0,0), (0,1), (1,0), (1,1)\}$,

16 مختلف روابط میں سے 8 روابط میں جوڑا (0, 1) موجود ہے۔

14. (a) $\{(1,1),(1,2), (1,3)\ (1,4),(2,2), (3,3)\}$ (b) $\{(1,1)\}$ (c) $\{(2,2), (3,3)\}$
(d) $\{(1,2), (1,3), (1,4)\}$ (e) $\{(1,2), (1,3), (1,4),(2,2), (3,3)\}$

15. گر ایک 'پر' تفاعل ہے لیکن ایک۔ایک تفاعل نہیں ہے۔

16. نہ تو ایک۔ایک تفاعل ہے اور نہ ہی 'پر' تفاعل ہے۔

17. (i) $\{(1,1),(2,2),(3,3)\}$ (ii) $\{(1,2),(2,1),(3,3)\}$
(iii) $\{(1,3),(2,2),(3,1)\}$ (iv) $\{(1,1),(2,3),(3,3)\}$

نوٹ: مطلوبہ شرائط کے مطابق ان کے علاوہ اور بھی تفاعل ہو سکتے ہیں۔

مشق 1.4

1. پہلا ربع $(1,6), (\frac{1}{7},\frac{4}{9}), (\frac{7}{2},\frac{1}{2}), (3,57)$

دوسرا ربع $(1-7, 3)$

تیسرا ربع $(-7,-\frac{3}{2}), (-\frac{\sqrt{3}}{2},-1.7), (-1,-11)$

چوتھا ربع $(\sqrt{3},-4), (\sqrt{2},-\sqrt{3}), (\sqrt{5},-6.54), (27,-72), (1.7,-2.7), (\sqrt{3},-1.3)$

3. $A\times B = \{(2,-5), (2,-4), (3,-5), (3,-4), (4,-5), (4,-4), (5,-5), (5,-4)\}$

$B\times A = \{(-5,2), (-5,3), (-5,4), (-5,5), (-4,2), (-4,3), (-4,4), (-4,5)\}$

$A\times A = \{(2,2), (2,3), (2,4), (2,5), (3,2), (3,3), (3,4), (3,5), (4,2), (4,3), (4,4), (4,5), (5,2), (5,3), (5,4), (5,5)\}$

متفرق مشق I

1. (a) $\{-1,1\}$ (b) $\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11\}$

2. $B\subseteq A,\ C\subseteq A,\ C\subseteq D.$

3. (a) نہیں (b) جی ہاں (c) نہیں (d) جی ہاں

4. (a) $\{(a,y), (a,z), (b,y), (b,z), (c,y), (c,z), (d,y), (d,z)\}$

(b) $\{(y,a), (y,b), (y,c), (y,d), (z,a), (z,b), (z,c), (z,d)\}$

(c) $\{(a,a), (a,b), (a,c), (a,d), (b,a), (b,b), (b,c), (b,d), (c,a), (c,b), (c,c), (c,d), (d,a), (d,b), (d,c), (d,d)\}$

(d) $\{(y,y), (y,z), (z,y), (z,z)\}$

5. (i) پہلا ربع (ii) تیسرا ربع

6. (a) $y = 0$ (b) $x = 0$

7. (a) $R_1 = \{(-1, \frac{1}{2}), (-1, \frac{1}{3})\}$, $R_2 = \{(-1, \frac{1}{3}), (1, \frac{1}{2}), (1, \frac{1}{3})\}$

(b) $R_1 = \{(\frac{1}{2}, -1)\}$, $R_2 = \{(\frac{1}{2}, -1), (\frac{1}{2}, 1)\}$, $R_3 = \{(\frac{1}{2}, -1), (\frac{1}{3}, -1)\}$

نوٹ: ان مثالی روابط کے علاوہ دوسرے روابط بھی لکھے جاسکتے ہیں

(c) $\varnothing$, $\{(-1,1)\}$, $\{(-1,-1)\}$, $\{(1,-1)\}$, $\{(1,1)\}$, $\{(-1,-1),(-1,1)\}$, $\{(-1,-1),(1,-1)\}$, $\{(-1,-1),(1,1)\}$, $\{(-1,1),(1,-1)\}$, $\{(-1,1),(1,1)\}$, $\{(1,-1),(1,1)\}$, $\{(-1,-1),(-1,1),(1,-1)\}$, $\{(-1,-1),(-1,1),(1,1)\}$, $\{(-1,-1),(1,-1),(1,1)\}$, $\{(-1,1),(1,-1),(1,1)\}$, $\{(-1,-1),(-1,1),(1,-1),(1,1)\}$

(d) $\{(\frac{1}{2},\frac{1}{2})\}$, $\{(\frac{1}{3},\frac{1}{3})\}$, $\{(\frac{1}{2},\frac{1}{2}),(\frac{1}{2},\frac{1}{3})\}$, $\{(\frac{1}{2},\frac{1}{3}),(\frac{1}{3},\frac{1}{3})\}$

نوٹ: ان روابط کے علاوہ دوسرے روابط بھی لکھے جاسکتے ہیں

8. (a) $\{(1, \frac{1}{2}), (2, \frac{1}{6}), (3, \frac{1}{4}), (4, \frac{1}{8})\}$

(b) $\{(1, \frac{1}{8}), (2, \frac{1}{4}), (3, \frac{1}{2}), (4, \frac{1}{6})\}$

(c) $\{(1, \frac{1}{4}), (2, \frac{1}{8}), (3, \frac{1}{2}), (4, \frac{1}{6})\}$

(d) $\{(1, \frac{1}{2}), (2, \frac{1}{2}), (3, \frac{1}{4}), (4, \frac{1}{4})\}$

نوٹ: ان تفاعل کے علاوہ دوسرے تفاعل بھی لکھے جاسکتے ہیں

9. (a) $\varnothing$ (b) $\{a,e\}$ (c) $\{a,e\}$ (d) $\{b,c,d,f\}$

(e) $\{a, e\}$

(f) $\{g, h, j, k, l, m, n, p, q, r, s, t, u, v, w, x, y, z\}$

10. (i) غلط (ii) غلط (iii) غلط (iv) صحیح (v) غلط
(vi) غلط (vii) غلط (viii) غلط (ix) غلط (x) صحیح

11. (i) $(A \cap B) \cup (A \cap C)$ (ii) $x \in A$ or $x \in B$ but $x \notin A \cap B$
(iii) $\ast$ (iv) $A' \cap B'$ (v) 2 ; 3 (vi) =
(vii) تیسرے (viii) مساوی (ix) نقطہ (x) $\{1,2,3\}$; $\{2,3,4\}$

12. (i) $A \times B$ (ii) $\{x \mid x \in E, 2 \leq x \leq 50\}$ (iii) مکمل اعداد
(iv) ایک۔ایک پر

مشق 2.1

1. (i) جمع کی خاصیت مبادلہ
(ii) جمع کی خاصیت تلازم (iii) جمعی ذاتی عنصر
(iv) جمع کی خاصیت تلازم (v) جمعی معکوس
(vi) جمعی معکوس (vii) ضرب کی خاصیت مبادلہ
(viii) ضرب کی خاصیت تقسیمی بلحاظ جمع
(ix) ضربی معکوس
(x) ضرب کی خاصیت تلازم (xi) جمعی معکوس

2. (i) جمعی خاصیت $\forall x, y, z \in R, x < y \Rightarrow x + z < y + z$
(ii) ضربی خاصیت $\forall x, y, z \in R$, if $z < 0$, $x < y \Rightarrow x z > y z$
(iii) جمعی خاصیت $\forall x, y, z \in R, x < y \Rightarrow x + z < y + z$
(iv) ضربی خاصیت $\forall x, y, z \in R$, if $z < 0$, $x < y \Rightarrow x z > y z$
(v) ضربی خاصیت $\forall x, y, z \in R$, if $z < 0$, $x > y \Rightarrow x z < y z$
(vi) ضربی خاصیت $\forall x, y, z \in R$, if $z < 0$, $x < y \Rightarrow x z > y z$
(vii) ضربی خاصیت $\forall x, y, z \in R$, if $z < 0$, $x > y \Rightarrow x z < y z$
(viii) ضربی خاصیت $\forall x, y, z \in R$, if $z < 0$, $x > y \Rightarrow x z < y z$

3. (i) $\{0, -1\}$ میں خاصیت بندش بلحاظ جمع و ضرب موجود نہیں ہے
(ii) $\{0\}$ میں خاصیت بندش بلحاظ جمع و ضرب موجود ہے
(iii) $\{1\}$ میں خاصیت بندش بلحاظ ضرب موجود ہے جبکہ خاصیت بندش بلحاظ جمع موجود نہیں ہے۔

مشق 2.2

1.

	اساس	قوت نما
(i)	7	15
(ii)	-189	10
(iii)	108	64

2. (i) مثبت (ii) منفی (iii) مثبت

3. (i) غلط (ii) درست طریقہ

4. 91^4 5. 5^6 6. a^{15} 7. $a^6 b^3 c^5$

8. $8^4 \times 3^4$ 9. $4^3 \times 5^3$ 10. $a^{13} b^{13}$ 11. $3^3 y^3$

12. $3^{14} 5^{14} x^{14} y^{14}$

مشق 2.3

1. 1000000 2. 64 3. 6561 4. 16 5. 243

6. 16 7. a^7 8. $2a^2 b^4$ 9. $-7x^4 y^4$

10. $(m+n)(p+q)^3$ 11. $5(2p-3q)^3(4-3r)^2$

12. $2(2l+3m)^2(4n-2p)^2$ 13. $(6a+b)^2(3c+d)^3(5e-f)$

مشق 2.4

1. $\frac{1}{4096}$ 2. $-\frac{12^5}{5^5}$ 3. $\frac{a^6}{b^6}$ 4. $\frac{m^3}{l^3}$

5. $\frac{9c^2d^2}{64a^4b^2}$ 6. $\frac{81x^{12}y^8}{16u^4t^4}$ 7. $\frac{64a^{12}b^{18}c^{24}}{729l^{12}v^6w^{18}}$

8. $\frac{289b^{14}c^{10}}{49x^6y^4}$ 9. $\frac{27x^{12}y^9z^6}{a^3b^6c^{15}}$ 10. $36x^{14}y^{12}$

11. $\frac{x^5y^5z^5}{243a^{25}b^{10}c^{30}}$ 12. $4m^4n^2p^2$

مشق 2.5

1.	13	2.	$6\sqrt{5}$	3.	12	4.	$8\sqrt{3}$
5.	$7\sqrt{6}$	6.	$\sqrt{3}$	7.	1	8.	$\sqrt{18}$
9.	4	10.	$11\sqrt{5}$	11.	$6\sqrt{2}$	12.	$72\sqrt{23}$

مشق 2.6

	1	2	3	4	5
مجذور	35	$\frac{xyz}{t}$	$\frac{8}{17}$	$\frac{p}{q}$	$\frac{3xyz}{ut}$
اشاریہ	4	5	6	n	5

6. 3   7. 5   8. ab 9. $\frac{5}{7}$ 10. mn

11. $\frac{3\sqrt[3]{3}}{5}$ 12. $\sqrt[mn]{q^{m-n}}$ 13. $4ab$ 14. $\frac{2ab^3}{3c^2d^6}$

مشق 2.7

1.	12	2.	$\frac{1}{2}$	3.	$\frac{16}{x}$	4	$\frac{3z}{x^2}$
5.	$\frac{3^{n}}{2^{4}}$	6.	1	7.	1	8.	1
9.	1	10.	$3\frac{1}{8}$	11.	15	12.	$1\frac{1}{5}$
13.	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	14.	4				

مشق 2.8

1. (i) $2-\sqrt{3}$ (ii) $3+2\sqrt{2}$ (iii) $5-2\sqrt{6}$

2. $4 ; 14$ 3. $6 ; 34$ 4. $2\sqrt{2} ; 10$

5. $2\sqrt{5} ; -4 ; -8\sqrt{5}$ 6. $2\sqrt{10} ; 6 ; 12\sqrt{10}$ 7. $194 ; -112\sqrt{3}$

8. 194 9. 322 10. (a) 98 (b) $\sqrt{3}-\sqrt{2}$

11. تیسرا، چوتھا، تیسرا، چوتھا، تیسرا

متفرق مشق II

1. (a) (i) خاصیت بندش ہے (ii) خاصیت بندش نہیں ہے (iii) خاصیت بندش ہے (iv) خاصیت بندش نہیں ہے
(b) (i) خاصیت بندش ہے (ii) خاصیت بندش ہے (iii) خاصیت بندش ہے (iv) خاصیت بندش نہیں ہے
(c) (i) خاصیت بندش ہے (ii) خاصیت بندش ہے (iii) خاصیت بندش ہے (iv) خاصیت بندش نہیں ہے
(d) (i) خاصیت بندش ہے (ii) خاصیت بندش ہے (iii) خاصیت بندش ہے (iv) خاصیت بندش نہیں ہے
(e) (i) خاصیت بندش ہے (ii) خاصیت بندش ہے (iii) خاصیت بندش ہے (iv) خاصیت بندش نہیں ہے
(f) (i) خاصیت بندش نہیں ہے (ii) خاصیت بندش نہیں ہے (iii) خاصیت بندش ہے (iv) خاصیت بندش نہیں ہے

2. (i) ضربی خاصیت (ii) ضربی خاصیت
(iii) ضربی خاصیت (منفی عدد)
(iv) ضربی خاصیت

3. (i) صحیح (ii) صحیح (iii) غلط (iv) غلط
(v) غلط (vi) غلط (vii) صحیح

4. (i) $\frac{1}{6561}$ (ii) $\frac{a^3}{b^6}$ (iii) a^{12} (iv) 8^{24}
(v) $-x^9$ (vi) $-\frac{m^3}{t^3}$

5. (i) 15 (ii) 42 (iii) 42

6. (i) 8 (ii) $\frac{4+\sqrt{3}}{2}$

7. (i) غلط (ii) غلط (iii) صحیح
(iv) غلط (v) صحیح

8. (i) 1 (ii) 1 (iii) 1

9. (i) $\sqrt{10}-3$ (ii) $-\frac{1}{2}(4-3\sqrt{2})$ 10. 34

11. (i) $\frac{x+\sqrt{x^2-4}}{2}$ (ii) $\left(\frac{x+\sqrt{x^2-a^2}}{a}\right)^2$ (iii) $\frac{2\sqrt{4-x^2}}{x^2}$

مشق 3.1

1. 6.875×10^{1}
2. 5.373458×10^{3}
3. 7.56837×10^{5}
4. 5.3×10^{-2}
5. 7.689×10^{-4}
6. 7×10^{6}
7. 8.9×10^{7}
8. 1.5×10^{-8}
9. 25760000
10. 0.000000070056
11. 0.0000000013
12. 10000000000000
13. 3.5×10^{8} cm
14. 1.5×10^{7}

مشق 3.2

1. $\log_2 32 = 5$
2. $\log_2 \frac{1}{128} = -7$
3. $\text{Log}_{10}\, 0.01 = -2$
4. $\log_{36} 216 = \frac{3}{2}$
5. $\log_{10} 100000 = 5$
6. $5^{2} = 25$
7. $27^{\frac{4}{3}} = 81$
8. $2^{-3} = \frac{1}{8}$
9. $10^{0} = 1$
10. $10^{-3} = 0.001$
11. $\frac{1}{2}$
12. $\frac{1}{8}$
13. 0.0001
14. 9
15. 125
16. 0، صفر سے بڑا کوئی بھی مثبت حقیقی عدد
17. 4
18. 2
19. 1
20. 6
21. 2
22. $\frac{4}{3}$
23. $\frac{7}{3}$
24. $\frac{-4}{3}$
25. $\frac{2}{3}$

مشق 3.3

1. $3\log_a x + \log_a y - 2\log_a z$
2. $\frac{1}{2}\log_a x + \log_a y + \frac{1}{2}\log_a z$
3. $-\frac{7}{12}\log_a x - \log_a y$
4. $-\frac{2}{3}\log_a x + \frac{3}{2}\log_a y - \frac{2}{3}\log_a z$
5. $-5\log_a z$
6. $\frac{11}{30}\log_a x + \frac{2}{15}\log_a y + \frac{1}{10}\log_a z$
8. 0
9. $\log_a(x^2-1)$

مشق 3.4

1.	0.9542	2.	0.6532	3.	1.8920	4.	0.7543
5.	1.0752	6.	3.8375	7.	0.9034	8.	3.7787
9.	$\bar{1}.8383$	10.	$\bar{2}.5378$	11.	$\bar{3}.3707$	12.	$\bar{2}.7829$
13.	4.8450	14.	$\bar{1}.9330$	15.	2.4043		

مشق 3.5

1.	56.30	2.	4.581	3.	163.4	4.	79.60
5.	1.002	6.	7087	7.	0.4104	8.	0.05994
9.	0.002221	10.	0.0007006	11.	0.000006074		
12.	0.000000004869	13.	3020	14.	0.0000001009		

مشق 3.6

1.	38.7	2.	23.81	3.	0.03835	4.	78.66
5.	6.776	6.	1.373	7.	8.98	8.	12.1
9.	469.8	10.	122.3	11.	4	12.	10
13.	46	14.	46	15.	48		

متفرق مشق III

1. (i) 4.52×10^{3} (ii) 2.6517×10^{1} (iii) 2.3×10^{-3}
   (iv) 1.082×10^{-5} (v) 1.30216×10^{-2}
2. (i) 7210 (ii) 0.00000000721 (iii) 5012000
3. (i) $\log_3 27 = 3$ (ii) $\log_2 \frac{1}{8} = -3$ (iii) $\log_7 \frac{1}{49} = -2$
   (iv) $\log_{10} 0.001 = -3$
4. (i) 3 (ii) 4 (iii) $\frac{2}{3}$ (iv) 3 (v) 3
5. (i) 2 (ii) 9 (iii) $\sqrt[3]{8}$ (iv) $\sqrt[5]{125}$
6. (i) 2.2175 (ii) $\bar{3}.5403$ (iii) 2.5225
   (iv) 3.8174 (v) 1.3728
7. (i) 207 (ii) 1.051 (iii) 0.2070
   (iv) 0.04677 (v) 44.19
8. (i) 1.3802 (ii) $\bar{2}.7993$ (iii) 2.9994
   (iv) 5.1474 (v) 1.9085
9. (i) ص (ii) غ (iii) ص (iv) غ (v) غ
10. (i) c (ii) c (iii) b (iv) b (v) d

مشق 4.1

1. (i) کثیررقمی (ii) کثیررقمی (iii) ناطق اظہاریہ
   (iv) کثیررقمی (v) کثیررقمی (vi) ناطق اظہاریہ
   (vii) ناطق اظہاریہ (viii) کثیررقمی (ix) غیر ناطق اظہاریہ
2. (i) غیر کثیررقمی (ii) کثیررقمی ; 2 (iii) کثیررقمی ; 3
   (iv) غیر کثیررقمی (v) کثیررقمی ; 1 (vi) غیر کثیررقمی
   (vii) کثیررقمی ; 1 (viii) کثیررقمی ; 3 (ix) کثیررقمی ; 1
3. (i) دورقمی (ii) دورقمی (iii) سہ رقمی (iv) سہ رقمی
   (v) دورقمی (vi) یک رقمی (vii) یک رقمی (viii) دورقمی

4. (i) دو (ii) پانچ (iii) صفر (iv) چار (v) چھ
(vi) تین (vii) سات (viii) صفر (ix) دو

مشق 4.2

1. (i) $4ay^2 - 5a^2y^3 + 2a^3y$ (ii) $3x^2 - ay^2 + 4a^2z^2 - 2a^4$
(iii) $x^2 + 4ay^2 + 2a^2xy - 2a^3x^3 - 5a^4$
(iv) $2 - 3x^3a + 4x^2a^3 + a^4z^6 - \frac{1}{4}a^5$
(v) $\frac{1}{3}xyz - \frac{1}{2}a + \frac{2}{5}a^2 - \frac{3}{7}a^4$

2. (i) $x^3 + x^2 - 2x - 1$ (ii) $-5y^5 + y^3 - 4y^2 + y - 7$
(iii) $t^6 - \frac{2}{3}t^3 - t + \frac{3}{4}$ (iv) $z^5 + z^3 + 2z - \frac{1}{3}$
(v) $5y^4 + 4y^3 - 2y + 7$ (vi) $y^4 + 4y + 6 + \frac{4}{y^2} - \frac{12}{y^3} + \frac{9}{y^4}$
(vii) $x^2 + 4x - 10 + \frac{12}{x} - \frac{9}{x^2}$ (viii) $4y^4 - 32y^2 - 96 - \frac{128}{y^2} - \frac{64}{y^4}$
(ix) $a^4 + 4a^2 - 6 + \frac{4}{a^2} + \frac{1}{a^4}$ (x) $4x^4 - 4x^2 + 9 - \frac{8}{x^2} - \frac{4}{x^4}$

مشق 4.3

1. (i) 17 (ii) 114 (iii) 4 (iv) $-\frac{9}{1151}$ (v) $-4\frac{4}{9}$
(vi) $-10\frac{2}{3}$

2. 5 3. 75 4. 40 5. 40

مشق 4.4

1. (i) $2ab - 5bc + b^2$ (ii) $x^2 - 4x$ (iii) $2a^2 - 4ab - 2b^2 - 2$

2. (i) $-7x^5 + x^4 + 6x^3 + 12x^2 + 6$ (ii) $-2a^4 + 14a^3b - 14a^2b^2 + 7$
(iii) $x^2 + y^2 + z^2 - 14x + 16y - 9z + 10t$

3. $-2a^4 + 2a^3b + 4a^2b^2 - ab^3 - 5b^3$ 4. $-51x^3 - 23x^2 + 37x + 9$

5. $6x^3 + 3x + 7y$ 6. $2x^4 - 4x^3 + 3x^2 - 3a$

7. (i) $a\sqrt{a} + b\sqrt{b}$ (ii) $a^4 + a^2b^2 + b^4$ (iii) $x^5 - y^5$

8. (i) $5x - y$ (ii) $x + 3$ (iii) $a^2 + ab - b^2$

9. 51 10. $4x^2 - 2x + 1$ 11. $k = 12 - a$ 12. 24

مشق 4.5

1. (i) -1 (ii) -3 (iii) 75

2. (i) صحیح (ii) صحیح (iii) صحیح (iv) غلط

مشق 4.6

1. $a^4b^4c^4 - d^8$ 2. $x^2 + y^2 - z^2 + 2xy$ 3. $256 - x^{24}$

4. $a^2 + b^2 - c^2 - d^2 + 2ab + 2cd$ 5. $x^4 - y^4$ 6. 11449

7. 4489 8. 1218816 9. 7921 10. 978121

مشق 4.7

1. (i) 10 (ii) 75 (iii) 53 (iv) 50

2. (i) 56 (ii) 15 3. (i) 0 (ii) -1040

4. (i) ± 1 (ii) ± 3

5. (i) $9+6\sqrt{2}$ (ii) 7 (iii) 7 (iv) 2207 (v) 47

مشق 4.8

1. (i) $x^2 + 9y^2 + 4z^2 + 6xy + 12yz + 4xz$

(ii) $16x^2 + 9y^2 + 25z^2 - 24xy - 30yz + 40xz$

(iii) $49x^2 + 4y^2 + 9z^2 - 28xy + 12yz - 42xz$

(iv) $\frac{1}{4}a^2 + \frac{4}{9}b^2 + \frac{9}{16} - \frac{2}{3}ab - b + \frac{3}{4}a$

2. (i) 3 (ii) 3 (iii) 110 (iv) 4 (v) 0 (vi) 50

مشق 4.9

1. (i) $27x^3 + 108x^2 + 144x + 64$ (ii) $125x^3 + 150x^2y + 60xy^2 + 8y^3$
   (iii) $64a^3 + 144a^2b + 108ab^2 + 27b^3$ (iv) $x^3 - 3x + \frac{3}{x} - \frac{1}{x^3}$
   (v) $27x^3 - 9\frac{x^2}{y} + \frac{x}{y^2} - \frac{1}{27y^3}$ (vi) $\frac{x^3}{y^3} + \frac{3x}{y} + \frac{3y}{x} - \frac{y^3}{x^3}$
2. (i) −5 (ii) 396 (iii) 4 (iv) 18 (v) 76
   (vi) 135 (vii) 207

مشق 4.10

1. $y^3 + \frac{1}{y^3}$ 2. $x\sqrt{x} - y\sqrt{y}$ 5. $l^3 + m^3 + 8n^3 + 6lmn$
6. $8x^3 + 27y^3 + 64z^3 - 72xyz$ 7. 45 8. −20 9. −140

متفرق مشق IV

1. (i) کثیر رقمی (ii) ناطق اظہاریہ (iii) کثیر رقمی
   (iv) غیر ناطق اظہاریہ (v) کثیر رقمی
   (vi) ناطق اظہاریہ (vii) کثیر رقمی (viii) کثیر رقمی
2. (a) دو (b) دو (c) تین (d) تین (e) ایک (f) تین
3. (a) x کا عددی سر 1 ، y کا عددی سر 1 ، مستقل رقم $-\frac{1}{2}$
   (b) x کا عددی سر −3 ، y کا عددی سر $-\frac{1}{2}$ ، y^2 کا عددی سر −3 ، مستقل رقم 6
   (c) x^2 کا عددی سر $\frac{1}{4}$ ، y کا عددی سر $-\sqrt{3}$ ، z^2 کا عددی سر 2 ، مستقل رقم −1
   (d) xyz کا عددی سر 2 ، مستقل رقم $-k$
4. (a) 1 (b) 3 (c) 3 (d) صفر (e) 3 (f) 1
5. (i) 12 (ii) −2 (iii) −25 (iv) 35 6. −36

7. (i) $49a^2 - 25$ (ii) $9b^2$ (iii) $12ab$

(iv) $27a^9 + 27a^6b^3 + 9a^3b^6 + b^9$ (v) $3p^2q\ ;\ 3pq^2$

(vi) $4a^4 + 25y^4 + 9z^2 - 20a^2y^2 + 30y^2z^2 - 12a^2z^2$

(vii) $7x$ (viii) $24lm^2$

8. $x^2 + \frac{1}{x^2} = 11\ ;\ x^4 + \frac{1}{x^4} = 119$ 9. 50,000

10. $\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{9}y^2 + \frac{9}{4}z^2 - \frac{1}{3}xy + yz - \frac{3}{2}xz$ 11. -124

12. (i) سہ رقمی (ii) 3 (iii) $-5a^2y^3 + 4ay^2 + 2a^3y$

(iv) 1 (v) 1 (vi) $a^2 + b^2 + c^2 - 2ab - 2bc + 2ac$

(vii) $x^2 - 10x + 24$ (viii) 4 (ix) $x - y$ (x) $x^3 - y^3 - 3x^2y + 3xy^2$

مشق 5.1

1. $3t^{2n}\left(1 - \frac{2}{t^3} + \frac{3}{t^5}\right)$ 2. $3(a+3)(x-2)(2x+a-1)$

3. $(ab + cd + ac - bd)(ab + cd - ac + bd)$ 4. $xy(2x - 3y)(x^2 + y^2)$

5. $abc(a + b)(a^2 + b^2)$ 6. $q(p + r)(al + bm + cn)$

7. $(ac + 2)^2$ 8. $(xy^2 + 9)^2$ 9. $(a - b + 9)^2$ 10. $(m^n t^n + 4z^n)^2$

11. $(xy + 0.05)^2$ 12. $\left(\frac{2}{3}x + \frac{3}{2}y^2\right)^2$ 13. $(ab - 3)^2$

14. $(xyz - 2)^2$ 15. $\left(x^2y - \frac{1}{x^2y}\right)^2$ 16. $(a^2 - 0.2)^2$ 17. $\{3 - (a - 3b)^2\}^2$

18. $(25 - a^2b)^2$ 19. $a\left(x - \frac{1}{2}\right)\left(x + \frac{1}{2}\right)\left(x^2 + \frac{1}{4}\right)$

20. $(a^2b^3 - 12c)(a^2b^3 + 12c)$ 21. $(a - b - 3c)(a - b + 3c)$

22. $(s^n - t^n)(s^n + t^n)$ 23. $(a - b + c + d)(a - b - c - d)$

24. $(7y - x)(y + 5x)$ 25. $(x + 12)(x + 3)$ 26. $(x + 20)(x - 5)$

27. $(z^2 - 5)(z^2 + 3)$ 28. $(r - 2)(r^2 + 2r + 4)(r^3 - 2)$

29. $(ax^2 - 24y^2)(ax^2 + 4y^2)$ 30. $(a + b + 18)(a + b + 2)$

مشق 5.2

(i) $(a-b-1)(a+b-1)$ (ii) $(1-x+y)(1+x-y)$ (iii) $(y-z)(y+z)^3$

(iv) $(2a-3b-\frac{1}{2})(2a+3b-\frac{1}{2})$ (v) $(x-y-\frac{1}{2})(x+y-\frac{1}{2})$

(vi) $(a-b+3c)(a+b+3c)$ (vii) $(x^2+y^2+z^2-2xy)(x^2+y^2+z^2+2xy)$

(viii) $(x+y-7z)(x+y+7z)$ (ix) $(s+t-4)(s-t+4)$

(i) $(2a^2 \quad 10ab+25b^2)(2a^2+10ab+25b^2)$

(ii) $(1-2b+2b^2)(1+2b+2b^2)$ (iii) $(a^2-a+1)(a^2+a+1)$

(iv) $(a^4-a^2+1)(a^2-a+1)(a^2+a+1)$

(v) $(8x^4-4x^2y^2+y^4)(8x^4+4x^2y^2+y^4)$

(vi) $(r^2-2rs+2s^2)(r^2+2rs+2s^2)$

(vii) $(4a^2-5ab-9b^2)(4a^2+5ab-9b^2)$

(viii) $(3x^2-2xz-4z^2)(3x^2+2xz-4z^2)$ (ix) $(x+y+z)(x-y-z+1)$

مشق 5.3

(i) $(2a-1)(a+1)$ (ii) $(3a-2)(2a+5)$ (iii) $(5b-2)(5b-1)$

(iv) $(4x-3)(3x-1)$ (v) $(x-3)(5x+2)$ (vi) $(6y-5)(3y+4)$

(i) $(3x-9)(8x-3)$ (ii) $(18x-4)(2x+9)$ (iii) $7(y+1)(y-3)$

(i) $xy^2z(2+x)(3-2x)$ (ii) $-(3x^n+1)(x^n-4)$

(iii) $(2x^ny^n-1)(3x^ny^n+5)$

(i) $(2s-2t-1)(s-t+1)$ (ii) $(5s+5t-2)(5s+5t-1)$

(iii) $\{5(2x+y)^2+2\}\{(2x+y)^2-3\}$ (iv) $\{3(x-2y)^2-2\}\{4(x-2y)^2-1\}$

مشق 5.4

(i) $(2a+3y)(4a^2-6ay+9y^2)$ (ii) $(xy^2+2z)(x^2y^4-2xy^2z+4z^2)$

(iii) $(x^2+4t)(x^4-4x^2t+16t^2)$ (iv) $2(x+y^2)(x^2-xy^2+y^4)$

(v) $t^2(t+y)(t^2-ty+y^2)$ (vi) $\frac{1}{3}xy(x+\frac{1}{3}y)(x^2-\frac{1}{3}xy+\frac{1}{9}y^2)$

2. (i) $(x-4y)(x^2+4xy+16y^2)$ (ii) $(2x-3y^2)(4x^2+6xy^2+9y^4)$
(iii) $2(x-5t)(x^2+5xt+25t^2)$ (iv) $y^2(y-z)(y^2+yz+z^2)$
(v) $\frac{1}{3}ab\left(\frac{1}{3}a-b\right)\left(\frac{1}{9}a^2+\frac{1}{3}ab+b^2\right)$ (vi) $\left(abc-\frac{1}{abc}\right)\left(a^2b^2c^2-1+\frac{1}{a^2b^2c^2}\right)$

3. (i) $(x-y)(x+y)(x^2+xy+y^2)(x^2-xy+y^2)$
(ii) $\left(xy-\frac{2}{z}\right)\left(xy+\frac{2}{z}\right)\left(x^2y^2+\frac{2xy}{z}+\frac{4}{z^2}\right)\left(x^2y^2-\frac{2xy}{z}+\frac{4}{z^2}\right)$
(iii) $(x-y)(x+y)(x^2+y^2)(x^2+xy+y^2)(x^2-xy+y^2)(x^4-x^2y^2+y^4)$
(iv) $(x^2+4y^2)(x^4-4x^2y^2+16y^4)$
(v) $(a^2+b^3y^3)(a^4-a^2b^3y^3+b^6y^6)$ (vi) $a(x^4+y^4)(x^8-x^4y^4+y^8)$

4. (i) $(a+1)(a^2-2a+2)$ (ii) $(x+2y)(x^2-2xy+4y^2-1)$
(iii) $(a-1)(a-2)(a^2+a+1)(a^2+2a+4)$
(iv) $(2x-1)(x+1)(4x^2+2x+1)(x^2-x+1)$
(v) $(x-2y-4z)(x^2+4y^2+16z^2-4xy-4xz-8yz)$
(vi) $(5r-s-at)(25r^2+s^2+a^2t^2+5rs+2at+5art)$
(vii) $r^2t^2(r+t^2)(r^2-rt^2+t^4)$

مشق 5.5

1. $(a-2b+3c)(a^2+4b^2+9c^2+2ab+6bc-3ac)$
2. $(a^2-3b-2c^2)(a^4+9b^2+4c^4+3a^2b-6bc^2+2a^2c^2)$
3. $(3x-1+2y^2)(9x^2+1+4y^4+3x+2y^2-6xy^2)$
4. $\left(4y^2+\frac{4}{y^2}-2y^3\right)\left(16y^4+\frac{16}{y^4}+4y^6-16+8y+8y^5\right)$
5. 0 6. $2x(x^2+3y^2+3z^2+3xy+3yz+3zx)$
7. $\left(a+1+\frac{1}{a}\right)\left(a^2+\frac{1}{a}-a-\frac{1}{a}\right)$

مشق 5.6

1. $(x-y)(y-z)(x-z)$ 2. $(r-s)(s-t)(r-t)$
3. $(a-b)(a+b)(b-c)(b+c)(a-c)(a+c)$
4. $(x-y)(x+y)(y-z)(y+z)(x-z)(x+z)$
5. $(2a-3b)(3b-4c)(2a-4c)$ 6. $(x-3y)(3y-5z)(x-5z)$

مشق 5.7

1. $(x-1)(x^2+2x+2)$
2. $(x-2)(x^2+5x+14)$
3. $(x-2)(x-3)(x+4)$
4. $(x+1)(x+2)(x+4)$
5. $(x-1)(x-4)(x+5)$
6. $(x-1)^2(x-2)$
7. $(x-1)(x-2)(x+3)$
8. $(x+3)(x^2-3x+4)$
9. $(x-2)(x-3)(x-6)$
10. $(x-1)(x+1)(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})(x^2+3)$

مشق 5.8

1. $5a^2$
2. $a^5b^3c^2$
3. $x-y$
4. $x^4+x^2y^2+y^4$
5. $x-1$
6. $2(x^2+3x+9)$
7. $2x^2+2x-4$
8. $y+2$
9. $6x-5y$
10. $9x+27$

مشق 5.9

1. $x-y$
2. $x-1$
3. $x+2$
4. $(x+y)^2$
5. $y+2$
6. $x+2y$
7. $x+1$
8. $6x-5$
9. $x+y+a$

مشق 5.10

1. $240a^2x^3y^3$
2. $(x+y+z)(x-y-z)(y-z-x)$
3. $(x+1)(x+2)(x+3)(x^2-2x+26)$
4. $a^{12}-b^{12}$
5. $(3x+1)(2x+3)(x-4)$
6. x^6-y^6
7. $(x-1)(x+1)(2x+3)^2(6x-1)$
8. $(x-1)(x^3+x^2+x-14)(x^3+x^2+x-21)$
9. $12x^2(x-4)(x-2)(x+7)$
10. $(1-x)(1+x)(1+x-x^4)$
11. $x^2-7x+12$
12. $x^2-12x+35$
13. $6x^2+x-2$
14. $3x^2+4x-4;\ 3x^2+x-2$
15. $x^3+3x^2+7x+10;\ x^3+4x-5$

مشق 5.11

1. $\frac{a+1}{a+3}, a \neq -3$

2. $\frac{4(3a-11)}{(a-5)(a-1)(a+1)}, a \neq 5, 1, -1$

3. $\frac{10b^2+18b+36}{b^3-8}, b \neq 2$

4. $\frac{3xy-x^2}{x^3+y^3}, x^3+y^3 \neq 0$

5. $\frac{1-2b}{4a^2-b^2}, 4a^2-b^2 \quad 0$

6. $\frac{z^2-y^2-x^2-xy+yz+xz}{(y-z)(z-x)}, x \neq y \neq z$

7. $\frac{8x^3+84x^2+256x+204}{(x+6)(x+3)(x+2)(x+5)}, x \neq -6, -3, -2, -5$

8. $\frac{2y^2(x-z)}{(x+y)(y+z)}, x+y \neq 0, x+z \neq 0, y+z \quad 0$

9. $\frac{x+2y-9z}{x+2y+3z}$

10. (i) $\frac{1}{a+b}, a+b \neq 0$ (ii) $\frac{y-1}{y+1}, y \neq -1$

(iii) $\frac{2}{(x^2-y^2)}, x^2-y^2 \neq 0$ (iv) $\frac{x^2+y^2}{x^2+2xy+4y^2}$ (v) 1 (vi) $-\frac{y-z}{y+z}$

$2y^2(x-z)$

11. (i) $\frac{x+2y}{x+3y}, x+3y \neq 0$ (ii) $a+b$ (iii) 1

(iv) $-\frac{(x-1)^2}{x^2(x-4)(x+5)}, x \neq 0, 4$

12. (i) $\frac{a-2b}{a}, a \neq 0$ (ii) 1 (iii) $\frac{2x(x-y)}{y^2}, y \neq 0$

مشق 5.12

1. $-\frac{x^3}{y^3}$

2. 0

3. $\frac{x(16x^3+16x^2+12x-2)}{1-x}$

4. 1

5. $\frac{2x^2}{x+y}, x+y \ne 0$

مشق 5.13

1. $5x^3 + 2y^2$
2. $7x + 14y + 2z^2$
3. $\frac{2x^2}{y^2} - \frac{y^2}{x^2}$
4. $\frac{x^2 y^3}{3} + \frac{4x}{y^3}$
5. $a - \frac{1}{a} - 2$
6. $y - \frac{1}{y} - 5$
7. $y - \frac{1}{y} - 2$
8. $y^2 + \frac{1}{y^2} + 1$
9. $(y-4)(y-5),(y-3)$
10. $2x^2 y^2$
11. $(x+5)(x+8)(x-4)$
12. $x + \frac{y}{4} - z$
13. $\frac{y^2}{x^2} + \frac{x^2}{y^2} + 1$
14. $\frac{x^3}{y^3} + \frac{y^3}{x^3} + 1$

مشق 5.14

1. $2a^2 - 2a + 1$
2. $a^2 + 5a + 3$
3. $\frac{x^2}{y^2} + 1 + \frac{y^2}{x^2}$
4. $y^2 + \frac{1}{y^2} + 1$
5. $a^2 + 4 + \frac{1}{a^2}$
6. $y^2 + 2 - \frac{1}{y^2}$
7. $x^2 + 2 - \frac{1}{x^2}$
8. $x^2 - z + \frac{y^2}{4}$
9. -4
10. $-2x + 2$
11. $p = 2$
12. $q = 16$
13. $p = 24, q = 16$
14. $p = 12, q = 16$
15. $\dfrac{x - \frac{1}{x} - 2}{y + \frac{1}{y} - 2}$
16. $\dfrac{2x^2 + 3x + 4}{b^2 - \frac{1}{b^2} - 4}$

متفرق مشق V

1. (i) $d^{n+1}(1 - d^{2n} - d^{4n+1})$ (ii) $(r-2y)(r+2y)(r^2+4y^2)(r^4+16y^4)$

(iii) $(1+2x)^2$ (iv) $[(x+2y)^n + 9]^2$ (v) $(t^2 - 0.05)^2$

(vi) $9(a^{2n} - 2x^n z^{2n})(a^{2n} + 2x^n y^{2n})$ (vii) $(3n^{2x} - 11m^{2y})(3n^{2x} + 11m^{2y})$

(viii) $(a^3 - 5)(a^3 + 3)$ (ix) $-(5x^2 + 8y^2)(2x^2 - 3y^2)$

(x) $(2r - s)(2r + s)(4r^2 + 2rs + s^2)(4r^2 - 2rs + s^2)$

2. (i) $(rs-yz)(rs+yz)(r^2s^2+y^2z^2)(r^2s^2+rsyz+y^2z^2)$
$(r^2s^2-rsyz+y^2z^2)(r^4s^4-r^2s^2y^2z^2+y^4z^4)$

(ii) $(x^2y^2+1)(x^2y^2-2)$

(iii) $(7y^2-4z^2)(49y^4-28y^2z^2+16z^4-1)$ (iv) $(a^3+\frac{2}{3}a+\frac{1}{7})^2$

3. (i) $(a-1)(a+1)(a^2+3)(a-\sqrt{2})(a+\sqrt{2})$ (ii) $(a-\sqrt{2})(a+\sqrt{2})(2a^4+a^2+2)$

4. $x-3$ 5. $x^2-2x-15$ 6. -1 7. $a=6, b=16$

8. (i) $2ab(a+b-5c)$ (ii) $(a-b)(a+b)$
(iii) $(xy-1)(xy+2)$ (iv) $(2-a+b)$
(v) $(a^2-0.2)^2$ (vi) $(b-18)(b+4)$
(vii) $(1-x)(5-7x)$ (viii) $(3x^2-5y)(9x^4+15x^2y+25y^2)$

9. (i) $x+2y$ (ii) $(a-5)(a-2)(a+3)$
(iii) $(x+y+z)$ (iv) $(x+3y)(x+2y)(x+y)$ (v) x^2-1

10. (i) d (ii) b (iii) a (iv) c (v) b (vi) d

11. (i) d (ii) c (iii) c (iv) b (v) d.

مشق 6.1

1. (i) ایک ; دو (ii) دو ; ایک (iii) 2×2 (iv) 2×1
(v) 1×1 ; مربعی (vi) مربعی (vii) مربعی (viii) b

2. (i) درست (ii) غلط (iii) درست (iv) غلط (v) غلط
(vi) غلط (vii) غلط (viii) درست (ix) غلط (x) غلط
(xi) غلط

مشق 6.2

1. مساوی ، ب
2. غیر مساوی قالب
3. مساوی قالب
4. $x = 3 , y = -7$
5. $x = 10, y = 10$
6. $x = 1 \;, \; y = 1$
7. ممکن نہیں ہے
8. ممکن نہیں ہے
9. $\begin{bmatrix} -1.3 & -3.2 \\ -8.1 & -5.6 \end{bmatrix}$
10. $\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$
11. $\begin{bmatrix} -5 & 5 \\ 5 & 5 \end{bmatrix}$
12. $\begin{bmatrix} 7 \\ -8 \end{bmatrix}$
13. $\begin{bmatrix} 6 & -8 \\ 7 & -12 \end{bmatrix}$
14. $\begin{bmatrix} -12 & 13 \\ -14 & 15 \end{bmatrix}$

مشق 6.3

1. $[2\;8]$
2. ممکن نہیں ہے
3. ممکن نہیں ہے
4. $\begin{bmatrix} 10 & 15 \\ 12 & 18 \end{bmatrix}$
5. ممکن نہیں ہے
6. $\begin{bmatrix} 7 \\ 23 \end{bmatrix}$
7. $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$
8. $\begin{bmatrix} 30 & 7 \\ 35 & 10 \end{bmatrix}$
9. $\begin{bmatrix} 15 & 0 \\ 18 & 3 \end{bmatrix}$
10. $\begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 9 & 3 \end{bmatrix}$
11. (a) $[5 \;\; 4]$ (b) $\begin{bmatrix} 50 \\ 3 \end{bmatrix}$ (c) Rs. 370
12. (a) $\begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 4.5 & 7 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 6 & 9 \\ 6.75 & 10.5 \end{bmatrix}$
13. جون کا منافع $= [\,18\,]$, ٹیکس $= [\,8\,]$
14. دسمبر کا منافع $= [\,23\,]$, ٹیکس $= [\,10\,]$

مشق 6.4

1. (a) -2 (b) $13\sqrt{2}$ (c) 0
2. (a) نادر (b) غیر نادر (c) نادر (d) غیر نادر
3. (a) $\begin{bmatrix} 6 & -3 \\ -4 & 2 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 5 & -4 \end{bmatrix}$ (c) $\begin{bmatrix} -10 & -5 \\ -8 & -4 \end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix} \sqrt{9} & -4 \\ -6 & 2 \end{bmatrix}$

4. (a) $-\frac{1}{16}\begin{bmatrix}7 & -5\\ -6 & 2\end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix}1 & -2\\ 0 & 1\end{bmatrix}$ (c) $-\frac{1}{12}\begin{bmatrix}-5 & 1\\ -8 & 4\end{bmatrix}$

(d) ضربی معکوس معلوم نہیں کیا جا سکتا (e) $\begin{bmatrix}5 & -5\\ -2.5 & 7.5\end{bmatrix}$ (f) ضربی معکوس معلوم نہیں کیا جا سکتا۔

5. (c) C اور D ایک دوسرے کے ضربی معکوس ہیں (d) جی ہاں

(e) جی ہاں عمومی نتیجہ یہ ہے: $|B| = n^2\,|A|$ if $B = nA,\ \forall n \in N.$

6. (i) $\frac{10}{3}$ (ii) 2 (iii) 9 (iv) 12

مشق 6.5

1. $\{(\frac{23}{24}, 1\frac{5}{12})\}$ 2. $\{(1, 1\frac{1}{2})\}$ 3. $\{(1, -2)\}$

4. $\{(-2, 1)\}$ 5. حل ممکن نہیں

6. $\{(-\frac{1}{5}, 1\frac{3}{5})\}$ 7. $\{(4, -\frac{11}{3})\}$ 8. $\{(-\frac{53}{661}, \frac{150}{661})\}$

9. حل ممکن نہیں 10. $\{(12, -3)\}$

متفرق مشق VI

3. (i) درست (ii) درست (iii) درست (iv) غلط (v) غلط

(vi) (a) درست (b) غلط (c) غلط (d) درست

4. (i) $\begin{bmatrix}2 & -4\\ 4 & -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3\\ -5\end{bmatrix}$ (ii) $\begin{bmatrix}5 & 3\\ 2 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6\\ -7\end{bmatrix}$

(iii) $\begin{bmatrix}-2 & 3\\ 5 & -6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2\\ 8\end{bmatrix}$ (iv) $\begin{bmatrix}5 & -2\\ 3 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2\\ 5\end{bmatrix}$

(v) $\begin{bmatrix}0 & 5\\ 6 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}7\\ 3\end{bmatrix}$ (vi) $\begin{bmatrix}2 & 3\\ 2 & -6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\ -6\end{bmatrix}$

5. (i) $2x - 3y = 0$, $x + 2y = 0$ (ii) $5x + 6y = -1$, $7x + 9y = -2$ (iii) $x = 3$, $y = 2$

(iv) $5x + 6y = 0$, $-2x - 3y = 0$

6. (i) نہیں (ii) نہیں (iii) نہیں (iv) جی ہاں

7. (i) 3 ; 3 ; 9 ; جی ہاں (ii) $\begin{bmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$; $\frac{1}{3}$; (iii) 27 ; (iv) 12

8. (i) مقطع (ii) نادر (iii) ضربی معکوس

(iv) $\begin{bmatrix} 0 & -5b \\ -3c & 1 \end{bmatrix}$ (v) مساوی (vi) صفر (vii) اسکیلر

(viii) قطاروں (ix) $\begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 6 & -1 \end{bmatrix}$ (x) A^{-1}

مشق 8.1

1. $m\angle AOP = 70°$; $m\angle POB = 110°$; $m\angle AOQ$
2. بقیہ ایک زاویے کی مقدار = 30° دوسرے دو زاویوں کی مقدار = 150°

مشق 8.2

1. $\Delta ABC \longleftrightarrow \Delta DEF$
$\Delta ABC \longleftrightarrow \Delta DFE$
$\Delta ABC \longleftrightarrow \Delta FDE$
$\Delta ABC \longleftrightarrow \Delta FED$
$\Delta ABC \longleftrightarrow \Delta EDF$
$\Delta ABC \longleftrightarrow \Delta EFD$

مشق 8.21

7. 2 سم ; 6 سم اور 3.5 سم ; 10.5 سم

مشق 8.24

1. (i) قائمہ مثلث (ii) قائمہ مثلث (iii) قائمہ مثلث (iv) قائمہ مثلث (v) قائمہ مثلث نہیں ہے
2. (i) 25 فٹ 3. (a) $3\sqrt{3}$ اکائیاں (b) $x\sqrt{3}$ اکائیاں

متفرق مشق VIII

1. (i) خط مستقیم (ii) دو نقاط (iii) تین (iv) پلے فیئر (v) ان کے متناظرہ زاویے
(vi) تیسرا (vii) عمود (viii) b^2 (ix) وتر (x) ناصف
2. (i) صحیح (ii) غلط (iii) غلط (iv) غلط (v) صحیح

فرہنگ اصطلاحات

اسکیلر قالب: ایسا وتری قالب جس کے وتر کے تمام ارکان برابر ہوں۔

الجبری اظہاریہ: ایسا اظہاریہ جو متغیرات یا مستقل مقداروں یا دونوں کو جمع، تفریق یا تقسیم، جذر کے ذریعہ ملائے۔

الجبری کسر: $\frac{P}{Q}$ کی طرز کا اظہاریہ الجبری کسر کہلاتا ہے جبکہ P, Q الجبری اظہاریے ہوں۔

اسم یا مقدار اصم: ایسا اظہاریہ جس کی کم از کم ایک رقم میں جذری علامت ہو۔

اکائی قالب: ایسا وتری قالب جس کے وتری عناصر 1 کے برابر ہوں۔

ایک۔ایک پر تفاعل: اگر سیٹ A سے B میں تفاعل f ایک ایک تفاعل کے ساتھ ساتھ 'پر تفاعل' بھی ہو۔

ایک ایک تفاعل: اگر سیٹ A سے B میں ایسا تفاعل ہو کہ B کا ہر رکن A کے ایک سے زیادہ ارکان کی شبیہ نہ ہو۔

الجبری جملہ: اگر دو الجبری اظہاریوں کے درمیان >، <، =، ≤، ≥ وغیرہ میں سے کسی علامت سے تعلق قائم کیا جائے تو ایسا تعلق الجبری جملہ کہلاتا ہے۔

اسقاط: دیئے گئے روابط سے ایک ایسا ربط معلوم کرنے کے عمل کو جو روابط میں شامل کسی مخصوص متغیر سے آزاد ہو، اسقاط کہلاتا ہے۔

پر تفاعل: اگر سیٹ A سے B میں f ایسا تفاعل ہو کہ Rang f = B، تو f پر تفاعل یا (Onto Function) کہلاتا ہے۔

پائی گراف: اس ترسیمی شکل میں دائرے کو کئی قطعات میں اس طرح تقسیم کیا جاتا ہے کہ ان کے رقبے دی گئی مقدار کو جس نسبت سے تقسیم کیا جاتا ہے، اسی نسبت سے ہوتے ہیں۔

تحتی سیٹ: اگر سیٹ A کا ہر رکن سیٹ B کا بھی رکن ہو تو سیٹ A کو سیٹ B کا تحتی سیٹ کہتے ہیں۔ اسے $A \subseteq B$ لکھتے ہیں۔

تفاعل: دو سیٹوں A اور B کا A سے B میں ایسا ثنائی ربط f جس میں (i) A = Dom f (ii) f کے کوئی بھی دو مترتب جوڑوں کے پہلے ارکان برابر نہ ہوں تو f تفاعل کہلاتا ہے۔

تغیر راست: اگر دو مقداروں کے درمیان اس طرح کا تعلق ہو کہ ایک مقدار کے بڑھنے سے دوسری مقدار بڑھے یا ایک مقدار کے کم ہونے سے دوسری مقدار کم ہو تو دونوں مقداروں کے درمیان اس تعلق کو تغیر راست کہتے ہیں۔

تغیر معکوس: اگر دو مقداروں کے درمیان اس طرح کا تعلق ہو کہ ایک مقدار کے بڑھنے سے دوسری مقدار کم ہو اور ایک مقدار کے کم ہونے سے دوسری مقدار بڑھے تو دونوں مقداروں کا ایسا تعلق تغیر معکوس کہلاتا ہے۔

تناسب: جب دو نسبتیں $a : b$ اور $c : d$ برابر ہوں یعنی $a : b = c : d$ تو چاروں مقداریں a , b , c اور d تناسب میں کہلاتی ہیں۔ یہ مقداریں متناسب کہلاتی ہیں۔

تکونیات: تکونیات Trigonometry کے لغوی معنی مثلث کی پیمائش کے ہیں۔ یہ ریاضی کی وہ شاخ ہے جس میں مثلثوں سے متعلق مختلف مسائل حل کیے جاتے ہیں۔

تکونیاتی نسبتیں: قائمہ مثلث کے کسی حادہ زاویے کے لیے کسی بھی دو اضلاع کی مقداروں کی نسبت تکونیاتی نسبت کہلاتی ہے۔

تغیر: مقداروں میں تبدیلی مثلاً درجہ حرارت، اشیاء کی قیمتیں، کسی ملک کی آبادی وغیرہ تغیر کہلاتی ہے۔

تغیریت: تغیریت وہ قیمت ہے جو کسی مواد میں انحرافات کے مربعوں کو جو کہ حسابی اوسط سے لیے گئے ہوں، کے مجموعہ کو ان کے مشاہدات کی تعداد سے تقسیم کرنے سے حاصل ہوتا ہے۔

ثانوی مواد: ایسا مواد جو کم از کم ایک شماریاتی مرحلے سے گزر چکا ہو، ثانوی مواد کہلاتا ہے۔

ثنائی ربط: $A \times B$ کا تحتی سیٹ A سے B کا ثنائی ربط ہے۔

ثنائی کا حلقہ اثر (ڈومین): سیٹ A سے سیٹ B میں ثنائی ربط R کے تمام مترتب جوڑوں کے پہلے اجزاء کا سیٹ، جسے $\text{Dom } R$ سے ظاہر کرتے ہیں۔

ثنائی ربط کا رد (رینج): سیٹ A سے سیٹ B میں ثنائی ربط R کے تمام مترتب جوڑوں کے دوسرے اجزاء کا سیٹ، جسے $\text{Range } R$ سے ظاہر کرتے ہیں۔

جذر المربع: کسی حقیقی عدد x کے لیے $\sqrt{x}$، x کا جذر المربع کہلاتا ہے۔ علامت $\sqrt{\ }$ کو جذر کی علامت اور x کو مجذور کہتے ہیں۔ پس $\sqrt{x}$ سے مراد ایسا مثبت عدد y ہے جس کا مربع x ہو یعنی $y = \sqrt{x}$ اسی طرح دو حقیقی اعداد x ، y اور قدرتی عدد n کے لیے اگر $x = y^n$ تو y ، x کا n واں خاص جذر کہلاتا ہے اور اسے $y = \sqrt[n]{x}$ سے ظاہر کرتے ہیں۔

جمعی ذاتی قالب: ایسا قالب جس کو کسی قالب میں جمع کرنے سے وہی قالب حاصل ہو۔

جماعتی تعدد: کسی مخصوص جماعت میں مشاہدات کی تعداد، جماعتی تعدد کہلاتی ہے۔

جماعتی وقفہ: جماعتی وقفہ جماعت کی وہ جسامت یا لمبائی ہے جو دو متواتر جماعتوں کی زیریں یا بالائی حدود میں فرق کے برابر ہوتی ہے۔

جماعتی حدود: ہر جماعت یا گروہ میں دو قیمتیں ہوتی ہیں ایک چھوٹی اور دوسری بڑی، چھوٹی قیمت کو زیریں جماعتی حد اور بڑی قیمت کو بالائی جماعتی حد کہتے ہیں۔

جماعتی نشان: کسی جماعت کے وسطی نقطے کو جماعتی نشان کہا جاتا ہے۔ یہ زیریں اور بالائی جماعتی حدود کا اوسط ہوتا ہے۔

حسابی اوسط: حسابی اوسط وہ قیمت ہے جو تمام مشاہدات کے مجموعہ کو ان کی تعداد سے تقسیم کرنے سے حاصل ہوتی ہے۔

حادہ زاویہ: ایسا زاویہ جس کی پیمائش $90°$ سے کم ہو۔

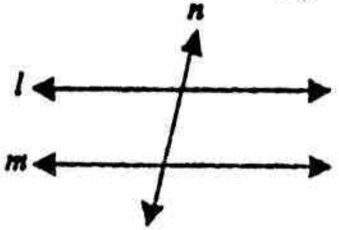
حادہ زاویہ مثلث: ایسی مثلث جس کے تینوں زاویے حادہ ہوں۔

حقیقی اعداد کا سیٹ: ناطق اعداد کے سیٹ Q اور غیر ناطق اعداد کے سیٹ Q' کے اتصال کو حقیقی اعداد کا سیٹ کہتے ہیں اور اسے R سے ظاہر کرتے ہیں۔

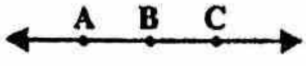
خاصہ: کسی عدد کے لوگرتھم کے صحیح عددی حصے کو خاصہ کہتے ہیں۔

خالی سیٹ: ایسا سیٹ جس میں ایک بھی رکن نہ ہو۔ اسے $\varnothing$ یا $\{\ \}$ سے ظاہر کرتے ہیں۔

خط قاطع: دی ہوئی شکل میں خط n خط قاطع کہلاتا ہے۔ جو کہ خط l اور m کو قطع کرتا ہے۔



درمیان اور پرے: اگر A, B, C کوئی بھی تین ہم خط نقاط اس طرح ہوں کہ $m\overline{AB} + m\overline{BC} = m\overline{AC}$



تو نقطہ B نقاط A اور C کے درمیان کہلاتا ہے اور نقطہ C خط AB پر B سے پرے کہلاتا ہے اسی طرح نقطہ A خط BC پر B سے پرے کہلاتا ہے۔

دائرہ: مستوی کے کسی ایک معین (*Fixed*) نقطہ سے ہم فاصلہ نقاط کا سیٹ دائرہ کہلاتا ہے۔ معین نقطہ کو دائرے کا مرکز کہتے ہیں۔

دائرے کا محیط: کسی دائرے کے مرکز سے ہم فاصلہ تمام نقاط کو ملانے والے خط یعنی دائرے کی لمبائی کو دائرے کا محیط کہتے ہیں۔

دائروی چوکور: ایسا چوکور جس کے راس دائرے پر واقع ہوں، دائروی چوکور کہلاتا ہے۔

دائرے کا بیرونہ: نقاط کا ایسا سیٹ جن کا دائرے کے مرکز سے فاصلہ رداس سے زیادہ ہو، دائرے کا بیرونہ کہلاتا ہے۔

دائرے کا اندرونہ: نقاط کا ایسا سیٹ جن کا دائرے کے مرکز سے فاصلہ رداس سے کم ہو دائرے کا اندرونہ کہلاتا ہے۔

دائرے کا خط قاطع: ایسا خط مستقیم جو دائرے کو دو نقاط پر قطع کرے، دائرے کا خط قاطع کہلاتا ہے۔

دائرے کا سیکٹر: دائرے کے کوئی سے دو رداسی قطعات اور ان کے متعلقہ قوس سے گھرا ہوا دائروی علاقہ دائرے کا سیکٹر یا قطع دائرہ کہلاتا ہے۔

دودرجی مساوات: ایسی مساوات جس میں متغیر کا زیادہ سے زیادہ قوت نما دو ہو، دودرجی مساوات کہلاتی ہے۔

ڈی مورگن کے قوانین: اگر U کائناتی سیٹ ہو اور A اور B اس کے تحتی سیٹ ہوں۔

تو (i) $(A \cup B)' = A' \cap B'$

(ii) $(A \cap B)' = A' \cup B'$

کو ڈی مارگن کے قوانین کہتے ہیں۔

ذواضعاف اقل: دی گئی کثیر رقمیوں کے مشترک اضعاف میں سے کم سے کم درجہ کی ایسی کثیر رقمی جو دی گئی ہر کثیر رقمی سے پورا پورا تقسیم ہو جائے۔

ذوزنقہ: ایسا چوکور جس کے مخالف اضلاع کا صرف ایک جوڑا متوازی ہو۔

راسی زاویے: ایسے زاویے جن کے بازو مخالف شعاعوں کے دو جوڑے بناتے ہوں۔

رداسی قطعہ: دائرے کے مرکز سے اس کے کسی بھی نقطے کو ملانے والا قطعہ خط رداسی قطعہ کہلاتا ہے۔

رداس: رداسی قطعہ کی لمبائی رداس کہلاتی ہے۔

راست مشترک مماس: اگر دو دائروں کے مشترکہ مماسوں میں سے ہر ایک کے نقطہ مماس، دائروں کے مراکز کو ملانے والے قطعہ خط کے ایک ہی طرف واقع ہوں تو ایسے مشترک مماس راست مشترک مماس کہلاتے ہیں۔

زاویہ: دو غیر ہم خط شعاعوں کا اتصال جن کے سرے مشترک ہوں۔ شعاعیں جو زاویہ کی تشکیل کرتی ہیں انکے ضلعے یا بازو کہلاتے ہیں اور مشترک نقطہ زاویہ کا راس کہلاتا ہے۔

زاویہ قائمہ: ایسا زاویہ جس کی پیمائش 90° ہو۔

زاویہ کا اندرونہ: مستوی کے ان تمام نقاط کا سیٹ جو کہ کسی زاویہ کے اندر ہوں۔

زاویہ کا بیرونہ: مستوی کے ان تمام نقاط کا سیٹ جو نہ تو زاویہ کے اندرونے میں ہوں اور نہ ہی زاویہ پر ہوں۔

زاویہ کا ناصف: ایسی شعاع جو کسی زاویہ کی تنصیف کرے۔

زاویے: اگر دو زاویوں کی پیمائش کا مجموعہ 180° ہو تو وہ سپلیمنٹری زاویے کہلاتے ہیں۔

سیٹ: واضح اشیاء کے اجتماع کو سیٹ کہتے ہیں جن اشیاء پر سیٹ مشتمل ہوتا ہے وہ اس سیٹ کے عناصر یا ارکان کہلاتے ہیں۔

سیٹ کا تکملہ یا کمپلیمنٹ: اگر U کائناتی سیٹ اور $A \subset U$ تو $U - A$ کو سیٹ A کا تکملہ یا کمپلیمنٹ کہتے ہیں جسے A' یا A^c سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

سعت: دیئے گئے سواد میں سب سے بڑی قیمت اور سب سے چھوٹی قیمت کے فرق کو سعت کہتے ہیں۔

شعاع: اگر B, A کوئی دو نقاط ہوں تو شعاع AB جسے $\overrightarrow{AB}$ سے ظاہر کیا جاتا ہے اتصال ہے: (I) $\overline{AB}$ کے تمام نقاط
(II) $\overline{AB}$ میں B سے پرے کے تمام نقاط کا۔ نقطہ A کو $\overline{AB}$ کا سرا کہتے ہیں۔

صفری قالب: ایسا قالب جس کے تمام عناصر صفر ہوں اسے جمعی ذاتی قالب بھی کہتے ہیں۔

ضد لوگرتھم: اگر $\log x = y$ تو x , y کا ضد لوگرتھم کہلاتا ہے۔
اسے لکھتے ہیں: $x = \text{antilog } y$

ضربی ذاتی قالب: ایسا قالب جس کے خاص وتری عناصر 1 کے برابر ہوں اور اس کے علاوہ تمام عناصر صفر ہوں۔

طرفین: تناسب $a : b = c : d$ میں a اور d طرفین کہلاتے ہیں۔

عادہ: دیئے گئے سواد میں وہ قیمت جو سب سے زیادہ بار آئے عادہ کہلاتی ہے۔

عادِ اعظم: دو یا دو سے زیادہ کثیر رقمیوں کے عادِ اعظم سے مراد ایسی بڑے سے بڑی کثیر رقمی (جو کہ دی ہوئی کثیر رقمیوں کے مشترک اجزائے ضربی کا حاصل ضرب ہوتی ہے) جو دی گئی کثیر رقمیوں میں سے ہر ایک کو پورا تقسیم کرتی ہے۔

عام لوگرتھم: اساس 10 والے لوگرتھم کو عام لوگرتھم یا برگز (Briggs) لوگرتھم کہتے ہیں۔

عددی سر: ایسا مستقل عدد (مقدار) جو کسی متغیر سے ضرب دیا گیا ہو۔

عمودی ناصف: ایک ایسا خط مستقیم جو کسی قطعہ خط کا ناصف ہو اور اس پر عمود بھی ہو۔

غیر متناہی سیٹ: ایسا سیٹ جس کے ارکان کی تعداد لامحدود ہو یعنی متناہی سیٹ نہ ہو۔

غیر مختتم غیر متوالی کسر اعشاریہ: ایسی کسر اعشاریہ جو غیر مختتم ہو اور اس کے کسری حصے میں چند ہندسوں کی تکرار ایک ہی ترتیب سے نہ ہو۔ ایسی کسور اعشاریہ کو کسر عام میں تحویل نہیں کیا جا سکتا۔

غیر نادر قالب: ایسا قالب جس کا مقطع صفر کے برابر نہ ہو۔

غیر ناطق اعداد: ایسے اعداد جنہیں p/q کی شکل میں لکھا نہ جا سکے۔

غیر ناطق اظہاریہ: ایسا الجبری اظہاریہ جو $p(x) / q(x)$ کی شکل میں نہ لکھا جا سکے۔
جبکہ $q(x) \neq 0$ اور $q(x), p(x)$ کثیر رقمیاں ہوں۔

غیر واجب تحتی سیٹ: اگر A اور B کوئی دو سیٹ ہوں اور $B \subseteq A$ اور $A \subseteq B$ تو A اور B ایک دوسرے کے غیر واجب تحتی سیٹ ہیں۔

غیر ہم خط نقاط: ایسے نقاط جو ایک ہی خط پر واقع نہ ہوں۔

غیر مساوات: ایسا الجبری جملہ جس میں علامت > یا < ہو غیر مساوات کہلاتا ہے۔

غیر مسلسل متغیر: غیر مسلسل متغیر صرف مکمل عدد کی صورت میں ہوتا ہے۔ مثلاً خاندان میں بچوں کی تعداد وغیرہ۔

غیر مسلسل مواد: ایسا مواد جو غیر مسلسل متغیر سے متعلق ہو، غیر مسلسل مواد کہلاتا ہے۔

قطر: دائرے کے مرکز سے گزرتا ہوا وتر قطر کہلاتا ہے۔

قوس: دائرے کا کوئی سا حصہ قوس کہلاتا ہے۔

قوس صغیرہ: ایسی قوس جو نصف دائرے سے چھوٹی ہو، قوس صغیرہ کہلاتی ہے۔

قوس کبیرہ: ایسی قوس جو نصف دائرے سے بڑی ہو، قوس کبیرہ کہلاتی ہے۔

قوس کا مرکزی زاویہ: کوئی قوس دائرے کے مرکز پر جو زاویہ بناتی ہے اس کو مرکزی زاویہ کہتے ہیں۔

قوس کا محصور زاویہ: کسی قوس سے بننے والے ایسے زاویہ کو محصور زاویہ کہتے ہیں۔ جس کا راس قوس کا کوئی نقطہ ہو اور جس کے بازو قوس کے سروں سے گزریں۔

قائمہ مثلث: ایسی مثلث جس کے ایک زاویے کی مقدار 90° ہو یعنی زاویہ قائمہ ہو، قائمہ مثلث کہلاتا ہے۔
قائمہ مثلث کے قائمہ زاویہ کے سامنے والا ضلع وتر کہلاتا ہے۔ اس کے زیر بحث زاویہ کے سامنے والا ضلع عمود اور اس سے متصل ضلع قاعدہ کہلاتا ہے۔

قالب: اشیاء (اعداد یا متغیرات) کی مستطیلی یا مربعی شکل کی جدولیں جن کے عناصر کو مخصوص ترتیب سے بڑے خطوط وحدانی میں لکھا جاتا ہے۔

قالب کا بدل (ٹرانسپوز): کسی بھی مرتبہ کے قالب کی قطاروں کو کالموں اور کالموں کو قطاروں میں تبدیل کرنے سے حاصل ہونے والا قالب۔

قالب کا جمعی معکوس: اگر دو قالب ایسے ہوں کہ ان کا مجموعہ صفری قالب ہو تو وہ ایک دوسرے کے جمعی معکوس کہلاتے ہیں۔

قالب کا ضربی معکوس: اگر دو قالبوں کا حاصل ضرب اکائی قالب ہو تو دونوں ایک دوسرے کے ضربی معکوس کہلاتے ہیں۔

قالب کا مقطع: مربع قالب سے منسلک عدد اس کا مقطع کہلاتا ہے۔ اگر $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$، مربع قالب ہو تو اس کا مقطع اس طرح ظاہر کرتے ہیں: $|A| = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$

قالب کا متصل: ایسا قالب جو دیئے ہوئے 2 × 2 قالب کے وتری ارکان کو آپس میں تبدیل کر کے اور دوسرے ارکان کی علامات بدل کر حاصل کیا جاتا ہے۔

قالب کا مرتبہ: اگر کسی قالب میں r قطاریں اور c کالم ہوں تو $r \times c$ کو قالب کا مرتبہ کہتے ہیں۔

قائمۃ الزاویہ مثلث: ایسی مثلث جس کا ایک زاویہ قائمہ ہو۔

قدرتی لاگرتھم: اساس e والے لوگرتھم کو قدرتی لوگرتھم یا نیپیرین (Naperian) لوگرتھم کہتے ہیں۔

قطاری قالب: ایسا قالب جس میں صرف ایک قطار ہو۔

قطعہ خط: اگر A اور B کوئی دو نقاط ہیں تو قطعہ خط AB جسے $\overline{AB}$ سے ظاہر کیا جاتا ہے ان تمام نقاط پر مشتمل ہوتا ہے:
(i) نقاط A اور B پر اور (ii) ان تمام نقاط پر جو A اور B کے درمیان ہیں۔
نقاط A اور B قطعہ خط AB کے سرے کہلاتے ہیں۔

قوت سیٹ: کسی سیٹ کے تمام ممکنہ تحتی سیٹوں کا سیٹ قوت سیٹ کہلاتا ہے۔

قوت نما اور اساس: a^n کو a کی n ویں قوت کہتے ہیں، a کو اساس اور n کو قوت نما کہتے ہیں۔

کارتیسی حاصل ضرب: اگر A اور B دو سیٹ ہوں تو ان کا کارتیسی حاصل ضرب $A \times B$ سے ظاہر کیا جاتا ہے اور
$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A \text{ اور } b \in B\}$$

کارتیسی محددات: کسی مترتب جوڑے $P(x, y)$ میں x اور y نقطہ P کے کارتیسی محددات کہلاتے ہیں۔ x کو x - محدد یا فصلہ اور y کو y - محدد یا معینہ کہتے ہیں۔

کالمی قالب: ایسا قالب جس میں صرف ایک کالم ہو۔

کائناتی سیٹ: ایسا سیٹ جو زیر بحث سیٹوں کے تمام ارکان پر مشتمل ہوتا ہے۔ اسے U سے ظاہر کرتے ہیں۔

کثیر رقمی: ایسا الجبری اظہاریہ جس کی ہر رقم میں متغیر یا متغیرات کا قوت نما صفر یا مثبت صحیح عدد ہوتا ہے۔

کمپلیمنٹری زاویے: اگر دو زاویوں کی پیمائش کا مجموعہ 90° ہو تو کمپلیمنٹری زاویے کہلاتے ہیں۔

کالمی شکل: یہ مواد کو ترسیمی طور پر پیش کرتی ہے۔ اس میں ایک ہی چوڑائی کے افقی (یا عمودی) کالم ہوتے ہیں۔ جن کی لمبائیاں دی گئی کی قیمتوں کی نسبت سے دی جاتی ہیں۔

کالمی نقشہ: کالمی نقشہ متصل عمودی مستطیلوں کا مجموعہ ہوتا ہے۔

کھلے جملے: ایسے جملے جن کے غلط یا صحیح ہونے کے لیے دی گئی شرائط کو مکمل کرنا ضروری ہو، کھلے جملے کہلاتے ہیں۔

گروہی مواد: مواد کو کئی گروہوں میں اپنی ضرورت کی بنا پر ترتیب دیا جائے تو اس مواد کو گروہی مواد کہتے ہیں۔

لوگرتھم: اگر $a^y = x$ تو y کو a کی اساس پر x کا لوگرتھم کہتے ہیں اور اس کو $y = \log_a x$ سے ظاہر کرتے ہیں۔

مترادف سیٹ: اگر دو سیٹوں کے ارکان کے درمیان ایک۔ایک مطابقت قائم ہو یعنی دونوں کے ارکان تعداد میں برابر ہوں تو وہ مترادف سیٹ کہلاتے ہیں۔

مترتب جوڑا: دو اعداد کا ایسا جوڑا جس میں ان کی ترتیب کا خاص خیال رکھا جائے۔

متصلہ زاویہ: دو زاویے متصلہ کہلاتے ہیں اگر

(i) ان کا راس مشترک ہو

(ii) ان کا ایک بازو مشترک ہو (iii) ان کے اندرونے کا تقاطع خالی سیٹ ہو۔

متغیر مقدار: متغیر ایک ایسی علامت ہوتی ہے جو کسی غیر خالی سیٹ کے ارکان کو ظاہر کرتی ہے۔

متماثل الساقین ذوزنقہ: ایسا ذوزنقہ جس میں دونوں غیر متوازی اضلاع متماثل ہوں۔

متماثل الساقین مثلث: ایسی مثلث جس کے دو اضلاع متماثل ہوں۔

متماثل زاویے: دو زاویے متماثل کہلاتے ہیں اگر ان کی پیمائش مساوی ہو۔

متماثل مثلثان: دو مثلث متماثل کہلاتی ہیں اگر ان کے متناظرہ ضلعے اور زاویے متماثل ہوں۔

متناہی سیٹ: ایسا سیٹ جس کے ارکان کی تعداد محدود ہو۔

متوازی الاضلاع: ایسا چوکور جس کے مخالف اضلاع متوازی ہوں۔

متوازی خطوط: دو خطوط متوازی کہلاتے ہیں اگر

(i) وہ ہم مستوی ہوں (ii) ایک دوسرے کو قطع نہ کرتے ہوں

متوالی کسر اعشاریہ: ایسی کسر اعشاریہ جو غیر مختتم ہو اور جس کے کسری حصے میں چند ہندسے بار بار ایک ہی ترتیب میں آتے ہوں۔ان کو آسانی سے کسر عام میں تحویل کیا جا سکتا ہے۔

مثلث: قطعات خط $\overline{AB}$، $\overline{BC}$ اور $\overline{CA}$ کا اتصال مثلث ABC کہلاتا ہے جبکہ A, B اور C غیر ہم خط نقاط ہوں۔ مثلث ABC کو ΔABC سے ظاہر کرتے ہیں۔ نقاط A, B اور C اس کے راس ہیں۔ $\angle A$ ، $\angle B$ ، $\angle C$ مثلث کے زاویے ہیں۔

مثلث کا ارتفاع: کسی مثلث میں اس کے کسی راس سے اس کے متقابلہ ضلع پر کھینچا جانے والا عمود اس کا ارتفاع کہلاتا ہے۔

مثلث کا اندرونہ: ان نقاط کا سیٹ جو مثلث کے تینوں زاویوں کے اندرونے میں ہوں۔

مثلث کا اندرونی زاویہ: مثلث ABC میں A∠ ، B∠ اور C∠ مثلث کے اندرونی زاویے کہلاتے ہیں۔

مثلث کا بیرونہ: ان نقاط کا سیٹ جو نہ مثلث پر ہوں اور نہ اس کے اندرونے میں ہوں۔

مثلث کا بیرونی زاویہ: ایسا زاویہ جو کسی مثلث کے اندرونی زاویہ کا متصلہ اور سپلیمنٹری زاویہ ہو اسے مثلث کا بیرونی زاویہ کہتے ہیں۔

محدب سیٹ: مستوی کے نقاط یا ایسا سیٹ جس میں اس کے کسی دو نقاط A اور B کے لیے قطعہ خط AB اس سیٹ میں موجود ہو۔

مختتم کسر اعشاریہ: ایسی کسر اعشاریہ جس کے کسری حصہ میں ہندسوں کی تعداد محدود ہو۔ ایسی کسور اعشاریہ آسانی سے کسر عام کی صورت میں تحویل کی جا سکتی ہیں۔

مختلف الاضلاع مثلث: ایسی مثلث جس کے تینوں اضلاع متماثل نہ ہوں۔

مربع: ایسا مستطیل جس کے متصلہ اضلاع متماثل ہوں۔

مربعی قالب: ایسا قالب جس میں قطاروں اور کالموں کی تعداد برابر ہو۔

مساوی الاضلاع مثلث: ایسی مثلث جس کے تینوں اضلاع متماثل ہوں۔

مساوی سیٹ: ایسے سیٹ جن کے ارکان ایک جیسے ہوں۔

مساوی قالب: ایسے دو قالب جن کے مرتبہ ایک ہی ہوں اور متناظرہ عناصر برابر ہوں۔

مستطیل: ایسا متوازی الاضلاع جس کا کم از کم ایک زاویہ قائمہ ہو۔

مستطیلی قالب: ایسا قالب جس میں قطاروں کی تعداد کالموں کی تعداد کے برابر نہ ہو۔

مستقل مقدار: ایسی مقدار جس کی قیمت تبدیل نہ ہو۔

مسئلہ باقی: اگر کثیر رقمی $p(x)$ جس کا درجہ n جبکہ $(n \geq 1)$ ہو، کو یک درجی کثیر رقمی $(x - a)$ سے تقسیم کرنے پر باقی $r = p(a)$ حاصل ہوتا ہے۔

معین: ایسا متوازی الاضلاع جس کے متصلہ اضلاع متماثل ہوں۔

منفرجہ زاویہ مثلث: ایسی مثلث جس کا ایک زاویہ منفرجہ ہو۔

مینٹیسہ: کسی عدد کے لوگرتھم کے کسری حصہ کو مینٹیسہ کہتے ہیں اور یہ ہمیشہ مثبت ہوتا ہے۔

متغیر: ایسی مقدار جس کی قیمت متعین نہ ہو بلکہ بدلتی رہے، متغیر کہلاتی ہے۔

معیاری انحراف: معیاری انحراف، تغیریت کا مثبت جذر المربع ہے۔

مقداری متغیر: ایسا متغیر جس کی قیمت عددی ہو، مقداری متغیر کہلاتا ہے۔

معلومات داری: معلومات کو تجزیئے اور توضیح کے لیے مناسب طریقے سے پیش کرنے کا نام معلومات داری ہے۔

مسلسل متغیر: مسلسل متغیر ایک ایسا متغیر ہے جس کی مقدار کو حقیقی عدد سے ظاہر کیا جا سکے۔ مثلاً کسی شخص کی عمر

مواد: مخصوص خصوصیات کی حامل ماہیتی یا مقداری معلومات مواد کہلاتی ہے۔

موادیت: مخصوص مقصد کے لیے جمع کردہ مواد کو موادیت کہتے ہیں۔

مطلق قیمت: ہر غیر صفر حقیقی عدد x کی مطلق قیمت $|x|$ ہمیشہ مثبت ہوتی ہے یعنی

$$|x| = x \,,\ \forall\, x \geq 0$$
$$= -x \,,\ \forall\, x < 0$$

اور حقیقی عدد صفر کی مطلق قیمت صفر ہوتی ہے۔

مسلسل تناسب: تین مقداریں a , b اور c مسلسل تناسب میں کہلاتی ہیں اگر

$$a : b = b : c$$

مساوات: ایسا الجبری جملہ جس میں علامت = ہو، مساوات کہلاتا ہے۔

مثلث کا محاصر دائرہ: ایسا دائرہ جو مثلث کے تینوں راسوں سے گزرتا ہے، مثلث کا محاصر دائرہ کہلاتا ہے۔

مثلث کا محصور دائرہ: ایسا دائرہ جو مثلث کے تینوں اضلاع سے مس کرتا ہے۔ مثلث کا محصور دائرہ کہلاتا ہے۔

مثلث کا جانبی دائرہ: ایسا دائرہ جو مثلث کے ایک ضلع کو بیرونی طور پر اور دیگر دو بڑھے ہوئے اضلاع کو اندرونی طور پر مس کرتا ہے۔ مثلث کا جانبی دائرہ کہلاتا ہے۔

متماثل دائرے: ایسے دائرے جن کے رداس مساوی ہوں، متماثل دائرے کہلاتے ہیں۔

مماس: ایسا خط مستقیم جو دائرے کو صرف اور صرف ایک نقطے پر مس کرے، مماس کہلاتا ہے۔

معکوس مشترک مماس: اگر دو دائروں کے مشترک مماسوں میں ہر ایک کے نقاطِ مماس دائروں کے مراکز کو ملانے والے خط کے مخالف اطراف میں ہوں تو دائروں کے ایسے مشترک مماس، معکوس مشترک مماس کہلاتے ہیں۔

نصف دائرہ: دائرے کے نصف محیط پر مشتمل شکل نصف دائرہ کہلاتی ہے۔

نسبت: ایک جیسی مقداروں a اور b کی نسبت اس طرح ہوتی ہے۔

$$a : b = \frac{a}{b}$$

a اور b اس کی رقوم کہلاتی ہیں۔ a مقدم اور b موخر کہلاتی ہے۔

نمونہ: آبادی کے تحتی سیٹ کو نمونہ کہتے ہیں۔

نادر قالب: ایسا قالب جس کا مقطع صفر ہو۔

ناطق انظہاریہ: ایسا الجبری انظہاریہ جو $p(x)/q(x)$ کی شکل میں لکھا جا سکے جبکہ $p(x)$ اور $q(x)$ کثیر رقمیاں ہوں اور $q(x) \neq 0$

ناطق اعداد: وہ تمام اعداد جنہیں p/q کی شکل میں لکھا جا سکے، جبکہ q , p صحیح اعداد ہوں اور $q \neq 0$

نصف خط: نقطہ A کے علاوہ شعاع AB کو نصف خط AB کہتے ہیں جسے $\overleftrightarrow{AB}$ سے ظاہر کرتے ہیں۔

وتری قالب: ایسا قالب جس کے خاص وتری عناصر کے علاوہ تمام عناصر صفر ہوں۔

وین اشکال: اشکال کے ذریعہ بھی سیٹوں کو ظاہر کیا جاتا ہے جنہیں وین اشکال کہتے ہیں۔

واجب تحتی سیٹ: اگر سیٹ A سیٹ B کا تحتی سیٹ ہو اور $B \neq A$ تو سیٹ A کو سیٹ B کا تحتی سیٹ کہتے ہیں اور $A \subset B$ سے ظاہر کرتے ہیں۔

وسطانیہ: مثلث کے کسی راس اور اس کے متقابل ضلع کے وسطی نقطہ کو ملانے والا قطعہ خط وسطانیہ کہلاتا ہے۔

ہم خط نقاط: ایسے نقاط جو ایک ہی خط پر واقع ہوں۔

وسطین: تناسب $a : b = c : d$ میں b اور c وسطین کہلاتے ہیں۔

وسطانیہ: جب مواد کسی ترتیب یعنی بڑھتی یا گھٹتی ہوئی صورت میں ہو تو وسطانیہ وہ قدر ہے جو اس پورے مواد کو دو برابر حصوں میں تقسیم کر دے یعنی مواد کا پچاس فیصد وسطانی قدر سے پہلے اور پچاس فیصد اس کے بعد ہوتا ہے۔

ANTILOGARITHMS

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9
.50	3162	3170	3177	3184	3192	3199	3206	3214	3221	3228	1	1	2	3	4	4	5	6	7
51	3236	3243	3251	3258	3266	3273	3281	3289	3296	3304	1	2	2	3	4	5	5	6	7
.52	3311	3319	3327	3334	3342	3350	3357	3365	3373	3381	1	2	2	3	4	5	5	6	7
.53	3388	3396	3404	3412	3420	3428	3436	3443	3451	3459	1	2	2	3	4	5	6	6	7
.54	3467	3475	3483	3491	3499	3508	3516	3524	3532	3540	1	2	2	3	4	5	6	6	7
.55	3548	3556	3565	3573	3581	3589	3597	3606	3614	3622	1	2	2	3	4	5	6	7	7
.56	3631	3639	3648	3656	3664	3673	3681	3690	3698	3707	1	2	3	3	4	5	6	7	8
.57	3715	3724	3733	3741	3750	3758	3767	3776	3784	3793	1	2	3	3	4	5	6	7	8
.58	3802	3811	3819	3828	3837	3846	3855	3864	3873	3882	1	2	3	4	4	5	6	7	8
.59	3890	3899	3908	3917	3926	3936	3945	3954	3963	3972	1	2	3	4	5	5	6	7	8
.60	3981	3990	3999	4009	4018	4027	4036	4046	4055	4064	1	2	3	4	5	6	6	7	8
.61	4074	4083	4093	4102	4111	4121	4130	4140	4150	4159	1	2	3	4	5	6	7	8	9
.62	4169	4178	4188	4198	4207	4217	4227	4236	4246	4256	1	2	3	4	5	6	7	8	9
.63	4266	4276	4285	4295	4305	4315	4325	4335	4345	4355	1	2	3	4	5	6	7	8	9
.64	4365	4375	4385	4395	4406	4416	4426	4436	4446	4457	1	2	3	4	5	6	7	8	9
.65	4467	4477	4487	4498	4508	4519	4529	4539	4550	4560	1	2	3	4	5	6	7	8	9
.66	4571	4581	4592	4603	4613	4624	4634	4645	4656	4667	1	2	3	4	5	6	7	9	10
.67	4677	4688	4699	4710	4721	4732	4742	4753	4764	4775	1	2	3	4	5	7	8	9	10
.68	4786	4797	4808	4819	4831	4842	4853	4864	4875	4887	1	2	3	4	6	7	8	9	10
.69	4898	4909	4920	4932	4943	4955	4966	4977	4989	5000	1	2	3	5	6	7	8	9	10
.70	5012	5023	5035	5047	5058	5070	5082	5093	5105	5117	1	2	4	5	6	7	8	9	11
.71	5129	5140	5152	5164	5176	5188	5200	5212	5224	5236	1	2	4	5	6	7	8	10	11
.72	5248	5260	5272	5284	5297	5309	5321	5333	5346	5358	1	2	4	5	6	7	9	10	11
.73	5370	5383	5395	5408	5420	5433	5445	5458	5470	5483	1	3	4	5	6	8	9	10	11
.74	5495	5508	5521	5534	5546	5559	5572	5585	5598	5610	1	3	4	5	6	8	9	10	12
.75	5623	5636	5649	5662	5675	5689	5702	5715	5728	5741	1	3	4	5	7	8	9	10	12
.76	5754	5768	5781	5794	5808	5821	5834	5848	5861	5875	1	3	4	5	7	8	9	11	12
.77	5888	5902	5916	5929	5943	5957	5970	5984	5998	6012	1	3	4	5	7	8	10	11	12
.78	6026	6039	6053	6067	6081	6095	6109	6124	6138	6152	1	3	4	6	7	8	10	11	13
.79	6166	6180	6194	6209	6223	6237	6252	6266	6281	6295	1	3	4	6	7	9	10	11	13
.80	6310	6324	6339	6353	6368	6383	6397	6412	6427	6442	1	3	4	6	7	9	10	12	13
.81	6457	6471	6486	6501	6516	6531	6546	6561	6577	6592	2	3	5	6	8	9	11	12	14
.82	6607	6622	6637	6653	6668	6683	6699	6714	6730	6745	2	3	5	6	8	9	11	12	14
.83	6761	6776	6792	6808	6823	6839	6855	6871	6887	6902	2	3	5	6	8	9	11	13	14
.84	6918	6934	6950	6966	6982	6998	7015	7031	7047	7063	2	3	5	6	8	10	11	13	15
.85	7079	7096	7112	7129	7145	7161	7178	7194	7211	7228	2	3	5	7	8	10	12	13	15
86	7244	7261	7278	7295	7311	7328	7345	7362	7379	7396	2	3	5	7	8	10	12	13	15
.87	7413	7430	7447	7464	7482	7499	7516	7534	7551	7568	2	3	5	7	9	10	12	14	16
.88	7586	7603	7621	7638	7656	7674	7691	7709	7727	7745	2	4	5	7	9	11	12	14	16
.89	7762	7780	7798	7816	7834	7852	7870	7889	7907	7925	2	4	5	7	9	11	13	14	16
.90	7943	7962	7980	7998	8017	8035	8054	8072	8091	8110	2	4	6	7	9	11	13	15	17
.91	8128	8147	8166	8185	8204	8222	8241	8260	8279	8299	2	4	6	8	9	11	13	15	17
.92	8318	8337	8356	8375	8395	8414	8433	8453	8472	8492	2	4	6	8	10	12	14	15	17
.93	8511	8531	8551	8570	8590	8610	8630	8650	8670	8690	2	4	6	8	10	12	14	16	18
.94	8710	8730	8750	8770	8790	8810	8831	8851	8872	8892	2	4	6	8	10	12	14	16	18
.95	8913	8933	8954	8974	8995	9016	9036	9057	9078	9099	2	4	6	8	10	12	15	17	19
.96	9120	9141	9162	9183	9204	9226	9247	9268	9290	9311	2	4	6	8	11	13	15	17	19
.97	9333	9354	9376	9397	9419	9441	9462	9484	9506	9528	2	4	7	9	11	13	15	17	20
98	9550	9572	9594	9616	9638	9661	9683	9705	9727	9750	2	4	7	9	11	13	16	18	20
99	9772	9795	9817	9840	9863	9886	9908	9931	9954	9977	2	5	7	9	11	14	16	18	20

LOGARITHMS

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9
50	6990	6998	7007	7016	7024	7033	7042	7050	7059	7067	1	2	3	3	4	5	6	7	8
51	7076	7084	7093	7101	7110	7118	7126	7135	7143	7152	1	2	3	3	4	5	6	7	8
52	7160	7168	7177	7185	7193	7202	7210	7218	7226	7235	1	2	2	3	4	5	6	7	7
53	7243	7251	7259	7267	7275	7284	7292	7300	7308	7316	1	2	2	3	4	5	6	6	7
54	7324	7332	7340	7348	7356	7364	7372	7380	7388	7396	1	2	2	3	4	5	6	6	7
55	7404	7412	7419	7427	7435	7443	7451	7459	7466	7474	1	2	2	3	4	5	5	6	7
56	7482	7490	7497	7505	7513	7520	7528	7536	7543	7551	1	2	2	3	4	5	5	6	7
57	7559	7566	7574	7582	7589	7597	7604	7612	7619	7627	1	2	2	3	4	5	5	6	7
58	7634	7642	7649	7657	7664	7672	7679	7686	7694	7701	1	1	2	3	4	4	5	6	7
59	7709	7716	7723	7731	7738	7745	7752	7760	7767	7774	1	1	2	3	4	4	5	6	7
60	7782	7789	7796	7803	7810	7818	7825	7832	7839	7846	1	1	2	3	4	4	5	6	6
61	7853	7860	7868	7875	7882	7889	7896	7903	7910	7917	1	1	2	3	4	4	5	6	6
62	7924	7931	7938	7945	7952	7959	7966	7973	7980	7987	1	1	2	3	3	4	5	6	6
63	7993	8000	8007	8014	8021	8028	8035	8041	8048	8055	1	1	2	3	3	4	5	5	6
64	8062	8069	8075	8082	8089	8096	8102	8109	8116	8122	1	1	2	3	3	4	5	5	6
65	8129	8136	8142	8149	8156	8162	8169	8176	8182	8189	1	1	2	3	3	4	5	5	6
66	8195	8202	8209	8215	8222	8228	8235	8241	8248	8254	1	1	2	3	3	4	5	5	6
67	8261	8267	8274	8280	8287	8293	8299	8306	8312	8319	1	1	2	3	3	4	5	5	6
68	8325	8331	8338	8344	8351	8357	8363	8370	8376	8382	1	1	2	3	3	4	4	5	6
69	8388	8395	8401	8407	8414	8420	8426	8432	8439	8445	1	1	2	2	3	4	4	5	6
70	8451	8457	8463	8470	8476	8482	8488	8494	8500	8506	1	1	2	2	3	4	4	5	6
71	8513	8519	8525	8531	8537	8543	8549	8555	8561	8567	1	1	2	2	3	4	4	5	5
72	8573	8579	8585	8591	8597	8603	8609	8615	8621	8627	1	1	2	2	3	4	4	5	5
73	8633	8639	8645	8651	8657	8663	8669	8675	8681	8686	1	1	2	2	3	4	4	5	5
74	8692	8698	8704	8710	8716	8722	8727	8733	8730	8745	1	1	2	2	3	4	4	5	5
75	8751	8756	8762	8768	8774	8779	8785	8791	8797	8802	1	1	2	2	3	3	4	5	5
76	8808	8814	8820	8825	8831	8837	8842	8848	8854	8859	1	1	2	2	3	3	4	5	5
77	8865	8871	8876	8882	8887	8893	8899	8904	8910	8915	1	1	2	2	3	3	4	4	5
78	8921	8927	8932	8938	8943	8949	8954	8960	8965	8971	1	1	2	2	3	3	4	4	5
79	8976	8982	8987	8993	8998	9004	9009	9015	9020	9025	1	1	2	2	3	3	4	4	5
80	9031	9036	9042	9047	9053	9058	9063	9069	9074	9079	1	1	2	2	3	3	4	4	5
81	9085	9090	9096	9101	9106	9112	9117	9122	9128	9133	1	1	2	2	3	3	4	4	5
82	9138	9143	9149	9154	9159	9165	9170	9175	9180	9186	1	1	2	2	3	3	4	4	5
83	9191	9196	9201	9206	9212	9217	9222	9227	9232	9238	1	1	2	2	3	3	4	4	5
84	9243	9248	9253	9258	9263	9269	9274	9279	9284	9289	1	1	2	2	3	3	4	4	5
85	9294	9299	9304	9309	9315	9320	9325	9330	9335	9340	1	1	2	2	3	3	4	4	5
86	9345	9350	9355	9360	9365	9370	9375	9380	9385	9390	1	1	2	2	3	3	4	4	5
87	9395	9400	9405	9410	9415	9420	9425	9430	9435	9440	0	1	1	2	2	3	3	4	4
88	9445	9450	9455	9460	9465	9469	9474	9479	9484	9489	0	1	1	2	2	3	3	4	4
89	9494	9499	9504	9509	9513	9518	9523	9528	9533	9538	0	1	1	2	2	3	3	4	4
90	9542	9547	9552	9557	9562	9566	9571	9576	9581	9586	0	1	1	2	2	3	3	4	4
91	9590	9595	9600	9605	9609	9614	9619	9624	9628	9633	0	1	1	2	2	3	3	4	4
92	9638	9643	9647	9652	9657	9661	9666	9671	9675	9680	0	1	1	2	2	3	3	4	4
93	9685	9689	9694	9699	9603	9708	9713	9717	9722	9727	0	1	1	2	2	3	3	4	4
94	9731	9736	9741	9745	9750	9754	9759	9763	9768	9773	0	1	1	2	2	3	3	4	4
95	9777	9782	9786	9791	9795	9800	9805	9809	9814	9818	0	1	1	2	2	3	3	4	4
96	9823	9827	9832	9836	9841	9845	9850	9854	9859	9863	0	1	1	2	2	3	3	4	4
97	9868	9872	9877	9881	9886	9890	9894	9899	9903	9908	0	1	1	2	2	3	3	4	4
98	9912	9917	9921	9926	9930	9934	9939	9943	9948	9952	0	1	1	2	2	3	3	4	4
99	9956	9961	9965	9969	9974	9978	9983	9987	9991	9996	0	1	1	2	2	3	3	3	4

ANTILOGARITHMS

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9
.00	1000	1002	1005	1007	1009	1012	1014	1016	1019	1021	0	0	1	1	1	1	2	2	2
.01	1023	1026	1027	1030	1033	1035	1038	1040	1042	1045	0	0	1	1	1	1	2	2	2
.02	1047	1050	1052	1054	1057	1059	1062	1064	1067	1069	0	0	1	1	1	1	2	2	2
.03	1072	1074	1076	1079	1081	1084	1086	1089	1091	1094	0	0	1	1	1	1	2	2	2
.04	1096	1099	1102	1104	1107	1109	1112	1114	1117	1119	0	1	1	1	1	2	2	2	2
.05	1122	1125	1127	1130	1132	1135	1138	1140	1143	1146	0	1	1	1	1	2	2	2	2
.06	1148	1151	1153	1156	1159	1161	1164	1167	1169	1172	0	1	1	1	1	2	2	2	2
.07	1175	1178	1180	1183	1186	1189	1191	1194	1197	1199	0	1	1	1	1	2	2	2	2
.08	1202	1205	1208	1211	1213	1216	1219	1222	1225	1227	0	1	1	1	1	2	2	2	3
.09	1230	1233	1236	1239	1242	1245	1247	1250	1253	1256	0	1	1	1	1	2	2	2	3
.10	1259	1262	1265	1268	1271	1274	1276	1279	1282	1285	0	1	1	1	1	2	2	2	3
.11	1288	1291	1294	1297	1300	1303	1306	1309	1312	1315	0	1	1	1	2	2	2	2	3
.12	1318	1321	1324	1327	1330	1334	1337	1340	1343	1346	0	1	1	1	2	2	2	2	3
.13	1349	1352	1355	1358	1361	1365	1368	1371	1374	1377	0	1	1	1	2	2	2	3	3
.14	1380	1384	1387	1390	1393	1396	1400	1403	1406	1409	0	1	1	1	2	2	2	3	3
.15	1413	1416	1419	1422	1426	1429	1432	1435	1439	1442	0	1	1	1	2	2	2	3	3
.16	1445	1449	1452	1455	1459	1462	1466	1469	1472	1476	0	1	1	1	2	2	2	3	3
.17	1479	1483	1486	1489	1493	1496	1500	1503	1507	1510	0	1	1	1	2	2	2	3	3
.18	1514	1517	1521	1524	1528	1531	1535	1538	1542	1545	0	1	1	1	2	2	2	3	3
.19	1549	1552	1556	1560	1563	1567	1570	1574	1578	1581	0	1	1	1	2	2	3	3	3
.20	1585	1589	1592	1596	1600	1603	1607	1611	1614	1618	0	1	1	1	2	2	3	3	3
.21	1622	1626	1629	1633	1637	1641	1644	1648	1652	1656	0	1	1	2	2	2	3	3	3
.22	1660	1663	1667	1671	1675	1679	1683	1687	1690	1694	0	1	1	2	2	2	3	3	3
.23	1698	1702	1706	1710	1714	1718	1722	1726	1730	1734	0	1	1	2	2	2	3	3	4
.24	1738	1742	1746	1750	1754	1758	1762	1766	1770	1774	0	1	1	2	2	2	3	3	4
.25	1778	1782	1786	1791	1795	1799	1803	1807	1811	1816	0	1	1	2	2	2	3	3	4
.26	1820	1824	1828	1832	1837	1841	1845	1849	1854	1858	0	1	1	2	2	3	3	3	4
.27	1862	1866	1871	1875	1879	1884	1888	1892	1897	1901	0	1	1	2	2	3	3	3	4
.28	1905	1910	1914	1919	1923	1928	1932	1936	1941	1945	0	1	1	2	2	3	3	4	4
.29	1950	1954	1959	1963	1968	1972	1977	1982	1986	1991	0	1	1	2	2	3	3	4	4
.30	1995	2000	2004	2009	2014	2018	2023	2028	2032	2037	0	1	1	2	2	3	3	4	4
.31	2042	2046	2051	2056	2061	2065	2070	2075	2080	2084	0	1	1	2	2	3	3	4	4
.32	2089	2094	2099	2104	2109	2113	2118	2123	2128	2133	0	1	1	2	2	3	3	4	4
.33	2138	2143	2148	2153	2158	2163	2168	2173	2178	2183	0	1	1	2	2	3	3	4	4
.34	2188	2193	2198	2103	2208	2213	2218	2223	2228	2234	1	1	2	2	3	3	4	4	5
.35	2239	2244	2249	2254	2259	2265	2270	2275	2280	2286	1	1	2	2	3	3	4	4	5
.36	2291	2296	2301	2307	2312	2317	2323	2328	2333	2339	1	1	2	2	3	3	4	4	5
.37	2344	2350	2355	2360	2366	2371	2377	2382	2388	2393	1	1	2	2	3	3	4	4	5
.38	2399	2404	2410	2415	2421	2427	2432	2438	2443	2449	1	1	2	2	3	3	4	4	5
.39	2455	2460	2466	2472	2477	2483	2489	2495	2500	2506	1	1	2	2	3	3	4	5	5
.40	2512	2518	2523	2529	2535	2541	2547	2553	2559	2564	1	1	2	2	3	4	4	5	5
.41	2570	2576	2582	2588	2594	2600	2606	2612	2618	2624	1	1	2	2	3	4	4	5	5
.42	2630	2636	2642	2649	2655	2661	2667	2673	2679	2685	1	1	2	2	3	4	4	5	6
.43	2692	2698	2704	2710	2716	2723	2729	2735	2742	2748	1	1	2	3	3	4	4	5	6
.44	2754	2761	2767	2773	2780	2786	2793	2799	2805	2812	1	1	2	3	3	4	4	5	6
.45	2818	2825	2831	2838	2844	2851	2858	2864	2871	2877	1	1	2	3	3	4	5	5	6
.46	2884	2891	2897	2904	2911	2917	2924	2931	2938	2944	1	1	2	3	3	4	5	5	6
.47	2951	2958	2965	2972	2979	2985	2992	2999	3006	3013	1	1	2	3	3	4	5	5	6
.48	3020	3027	3034	3041	3048	3055	3062	3069	3076	3083	1	1	2	3	4	4	5	6	6
.49	3090	3097	3105	3112	3119	3126	3133	3141	3148	3155	1	1	2	3	4	4	5	6	6

LOGARITHMS

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	0000	0043	0086	0128	0170						4	9	13	17	21	26	30	34	38
						0212	0253	0294	0334	0374	4	8	12	16	20	24	28	32	36
11	0414	0453	0492	0531	0569						4	8	12	15	19	23	27	31	35
						0607	0645	0682	0719	0755	4	7	11	15	19	22	26	30	33
12	0792	0828	0864	0899	0934						3	7	11	14	18	21	25	28	32
						0969	1004	1038	1072	1106	3	7	10	14	17	20	24	27	31
13	1139	1173	1206	1239	1271						3	7	10	13	16	20	23	26	30
						1303	1335	1367	1399	1430	3	7	10	13	16	19	22	25	29
14	1461	1492	1523	1553	1584						3	6	9	12	15	19	22	25	28
						1614	1644	1673	1703	1732	3	6	9	12	15	17	20	23	26
15	1761	1790	1818	1847	1875						3	6	9	11	14	16	20	23	26
						1903	1931	1959	1987	2014	3	6	8	11	14	17	19	22	24
16	2041	2068	2095	2122	2148						3	5	8	11	14	17	19	22	24
						2175	2201	2227	2253	2279	3	5	8	10	13	16	18	21	23
17	2304	2330	2355	2380	2405						3	5	8	10	13	15	18	20	23
						2430	2455	2480	2504	2529	2	5	7	10	12	15	17	20	22
18	2553	2577	2601	2625	2648						2	5	7	9	12	14	16	19	21
						2672	2695	2718	2742	2765	2	5	7	9	11	14	16	18	21
19	2788	2810	2833	2856	2878						2	4	7	9	11	13	16	18	20
						2900	2923	2945	2967	2989	2	4	6	8	11	13	15	17	19
20	3010	3032	3054	3075	3096	3118	3139	3160	3181	3201	2	4	6	8	11	13	15	17	19
21	3222	3243	3263	3284	3304	3324	3345	3365	3385	3404	2	4	6	8	10	12	14	16	18
22	3424	3444	3464	3483	3502	3522	3541	3560	3579	3598	2	4	6	8	10	12	14	15	17
23	3617	3636	3655	3674	3692	3711	3729	3747	3766	3784	2	4	6	7	9	11	13	15	17
24	3802	3820	3838	3856	3874	3892	3909	3927	3945	3962	2	4	5	7	9	11	12	14	16
25	3979	3997	4014	4031	4048	4065	4082	4099	4116	4133	2	3	5	7	9	10	12	14	15
26	4150	4166	4183	4200	4216	4232	4249	4265	4281	4298	2	3	5	7	8	10	11	13	15
27	4314	4330	4346	4362	4378	4393	4409	4425	4440	4456	2	3	5	6	8	9	11	13	14
28	4472	4487	4502	4518	4533	4548	4564	4579	4594	4609	2	3	5	6	8	9	11	12	14
29	4624	4639	4654	4669	4683	4698	4713	4728	4742	4757	1	3	4	6	7	9	10	12	13
30	4771	4786	4800	4814	4829	4843	4857	4871	4886	4900	1	3	4	6	7	9	10	11	13
31	4914	4928	4942	4955	4969	4983	4997	5011	5024	5038	1	3	4	6	7	8	10	11	12
32	5051	5065	5079	5092	5105	5119	5132	5145	5159	5172	1	3	4	5	7	8	9	11	12
33	5185	5198	5211	5224	5237	5250	5263	5276	5289	5302	1	3	4	5	6	8	9	10	12
34	5315	5328	5340	5353	5366	5378	5391	5403	5416	5428	1	3	4	5	6	8	9	10	11
35	5441	5453	5465	5478	5490	5502	5514	5527	5539	5551	1	2	4	5	6	7	9	10	11
36	5563	5575	5587	5599	5611	5623	5635	5647	5658	5670	1	2	4	5	6	7	8	10	11
37	5682	5694	5705	5717	5729	5740	5752	5763	5775	5786	1	2	3	5	6	7	8	9	10
38	5798	5809	5821	5832	5843	5855	5866	5877	5888	5899	1	2	3	5	6	7	8	9	10
39	5911	5922	5933	5944	5955	5966	5977	5988	5999	6010	1	2	3	4	5	7	8	9	10
40	6021	6031	6042	6053	6064	6075	6085	6096	6107	6117	1	2	3	4	5	6	8	9	10
41	6128	6138	6149	6160	6170	6180	6191	6201	6212	6222	1	2	3	4	5	6	7	8	9
42	6232	6243	6253	6263	6274	6284	6294	6304	6314	6325	1	2	3	4	5	6	7	8	9
43	6335	6345	6355	6365	6375	6385	6395	6405	6415	6425	1	2	3	4	5	6	7	8	9
44	6435	6444	6454	6464	6474	6484	6493	6503	6513	6522	1	2	3	4	5	6	7	8	9
45	6532	6542	6551	6561	6571	6580	6590	6599	6609	6618	1	2	3	4	5	6	7	8	9
46	6628	6637	6646	6656	6665	6675	6684	6693	6702	6712	1	2	3	4	5	6	7	7	8
47	6721	6730	6739	6749	6758	6767	6776	6785	6794	6803	1	2	3	4	5	5	6	7	8
48	6812	6821	6830	6839	6848	6857	6866	6875	6884	6893	1	2	3	4	4	5	6	7	8
49	6902	6911	6920	6928	6937	6946	6955	6964	6972	6981	1	2	3	4	4	5	6	7	8